# 1. RADIAÇÃO TÉRMICA E O POSTULADO DE PLANCK

## 1.1 INTRODUÇÃO

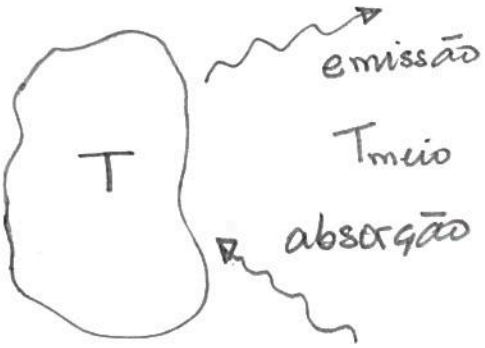
A mecânica quântica e a teoria da relatividade são generalizações da mecânica clássica. A mecânica clássica reproduz a mecânica quântica no limite de sistemas macroscópicos e a relatividade no limite de baixas velocidades ($v \ll c$).

Constantes características:

relatividade → c (vel. da luz)

mec. quântica → h (cte de Planck)

## 1.2 RADIAÇÃO TÉRMICA




$T > T_{meio} \Rightarrow e > a$

$T < T_{meio} \Rightarrow e < a$

$T = T_{meio} \Rightarrow e = a$

equilíbrio térmico

Taxa de emissão:

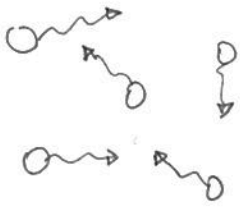
$$e = \frac{\text{energia emitida}}{\text{tempo}}$$

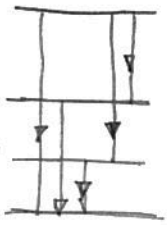
Taxa de absorção:

$$a = \frac{\text{energia absorvida}}{\text{tempo}}$$

* Espectros de emissão

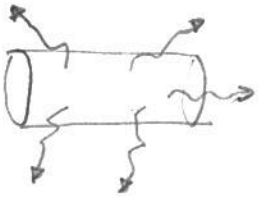
1) Estado gasoso





espectro discreto

2) Estado condensado (sólido ou líquido)





espectro contínuo

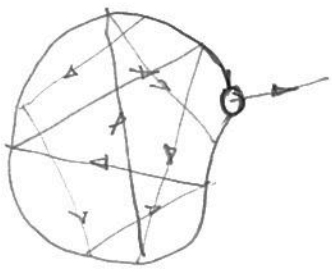
O espectro de emissão da matéria no estado condensado depende pouco do material e muito da temperatura.

Ex. metal aquecido

| | |
|---|---|
| 500 K | invisível no escuro, mas emite calor |
| 4100 K | vermelho |
| 6500 K | branco-azulado |

* Corpo negro → absorve toda radiação que incide sobre ele
→ possui espectro universal
→ Exemplo aproximado: carvão.

* Cavidade ressonante



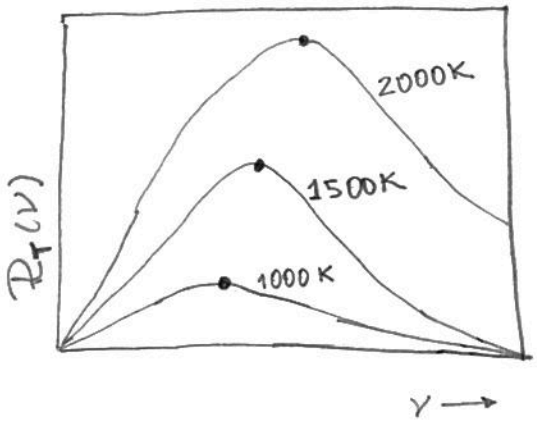
O orifício funciona como um corpo negro ideal

* Radiância espectral: $R_T(\nu)$

$$R_T(\nu) = \frac{\text{energia da radiação emitida}}{\text{área} \times \text{tempo} \times \text{frequência}}$$

$$R_T(\nu)\,d\nu = \frac{\text{energia com freq entre } \nu \text{ e } \nu+d\nu}{\text{área} \times \text{tempo}}$$

* Resultado experimental para $R_T(\nu)$

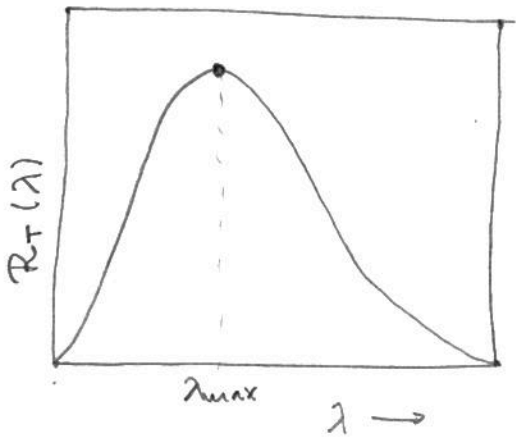



→ primeiros experimentos (1899)

$\nu_{max}$ → valor de $\nu$ que dá o máximo para $R_T(\nu)$

$$\nu_{max} \propto T$$

* $R_T(\lambda)\,d\lambda = \dfrac{\text{energia com comp de onda entre } \lambda \text{ e } \lambda+d\lambda}{\text{área} \times \text{tempo}}$




$\lambda_{max}$ → valor de $\lambda$ que dá o máximo para $R_T(\lambda)$

$$\lambda_{max} \propto \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \lambda_{max} T = \text{cte.}$$

Mas, cuidado. Apesar de $\nu\lambda = c$,

$$\nu_{max}\,\lambda_{max} \neq c$$

porque $R_T(\nu)$ e $R_T(\lambda)$ são funções diferentes.

Ver Ex. 5, pg 15.

* Radiância

$$R_T = \frac{\text{energia total emitida}}{\text{área} \times \text{tempo}} \longrightarrow \text{para todas as frequências}$$

$$R_T = \int_0^\infty R_T(\nu)\, d\nu \qquad \text{ou} \qquad R_T = \int_0^\infty R_T(\lambda)\, d\lambda$$

* Leis empíricas (experimentais)

(1) Lei de Stefan (1879)

$$R_T = \sigma T^4$$

$$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 \times K^4} \longrightarrow \text{cte de Stefan-Boltzmann.}$$

(2) Lei do deslocamento de Wien (1893)

$$\lambda_{max} T = 2{,}898 \times 10^{-3}\ m \times K$$

↳ cte de Wien.

* Densidade de energia: $\rho_T(\nu)$

$$\rho_T(\nu) = \frac{\text{energia na cavidade}}{\text{volume} \times \text{frequência}}$$

$$\rho_T(\nu)\, d\nu = \frac{\text{energia com freq entre } \nu \text{ e } \nu + d\nu}{\text{volume}}$$

Pode-se mostrar (prob. 2) que

$$\rho_T(\nu) = \frac{4}{c} R_T(\nu)$$

* Ex. 1. (a) Dado $\lambda_{max}$, calcular $T$

Sol: $\lambda_{max} = 5100\,\text{Å}$

$\lambda_{max} T = 2{,}898 \times 10^{-3}\,\text{mK}$

$\Rightarrow T = 5700\,\text{K} \rightsquigarrow$ temperatura da superfície do Sol

Estrela do Norte: $\lambda_{max} = 3500\,\text{Å}$

$\Rightarrow T = 8300\,\text{K}$ → faça a conta!

(b) Potência total irradiada por $cm^2$.

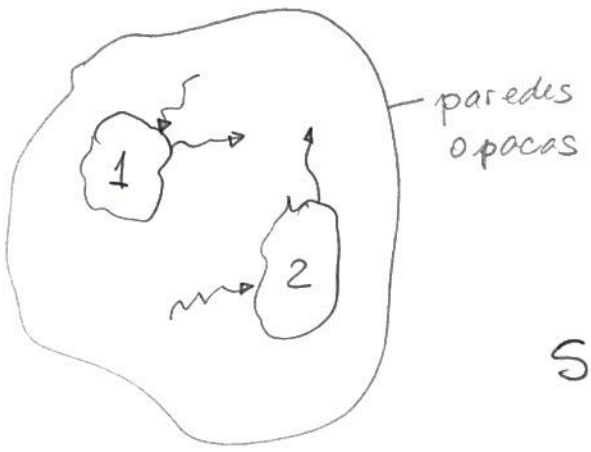
Sol:

$R_T = \sigma T^4 = 5{,}90 \times 10^7\ W/m^2 = 5900\ W/cm^2$

Estrela do Norte:

$R_T = \sigma T^4 = 2{,}71 \times 10^8\ W/m^2 = 27100\ W/cm^2$

*Ex. 2. Lei de Kirchhoff para a radiação




No equilíbrio:

$e_1 = a_1$

$e_2 = a_2$

Se $a_1 > a_2 \Rightarrow e_1 > e_2$

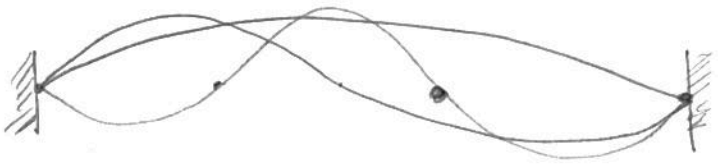
O objeto que absorve mais, emite mais.

Um bom emissor é um bom absorvedor.

## 1.3 TEORIA CLÁSSICA DA RADIAÇÃO DE CAVIDADE (Rayleigh - Jeans)

contagem do número de ondas estacionárias em uma cavidade metálica.

* CASO 1D



Onda propagando

$$E(x,t) = E_0 \operatorname{sen}(kx \mp \omega t), \qquad \omega = 2\pi\nu$$

Ondas estacionárias

$$E(x,t) = E_0 \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(2\pi\nu t)$$

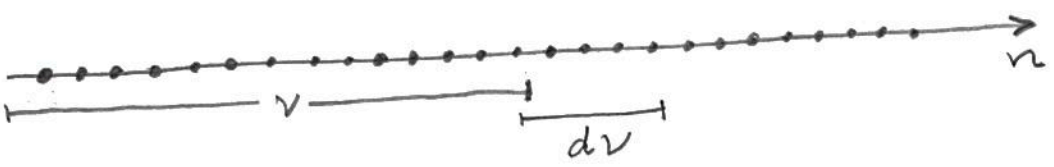
Note que $x = 0 \Rightarrow E(0,t) = 0$

Também devemos ter $E(a,t) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(ka) = 0 \Rightarrow ka = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

$$\omega = kc \Rightarrow 2\pi\nu = \frac{n\pi c}{a} \quad \text{ou} \quad \nu = n\frac{c}{2a}$$



$$n = \frac{2a}{c}\nu \quad \Rightarrow \quad dn = \frac{2a}{c}d\nu$$

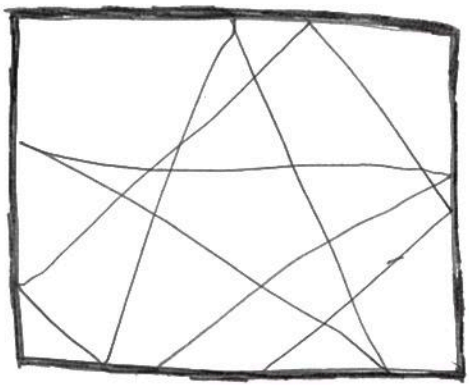
↳ nº pontos no intervalo de frequência $d\nu$.

* Dois estados de polarização




↳ $dn = \frac{4a}{c}d\nu$ ~ nº de ondas com freq entre $\nu$ e $\nu + d\nu$

* CASO 3D: cavidade cúbica



Onda propagando

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \operatorname{sen}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

$$\vec{k} = k_x \hat{\imath} + k_y \hat{\jmath} + k_z \hat{k}$$

Onda estacionária

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \operatorname{sen}(k_x x)\operatorname{sen}(k_y y)\operatorname{sen}(k_z z)\operatorname{sen}(2\pi\nu t)$$

Se $x = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$

O mesmo para $y = 0$ ou $z = 0$

Também devemos ter $\vec{E} = 0$ para $x = a$.

Assim $k_x a = n_x \pi \Rightarrow k_x = \frac{n_x \pi}{a}$

... $k_y = \frac{n_y \pi}{a}$, $k_z = \frac{n_z \pi}{a}$

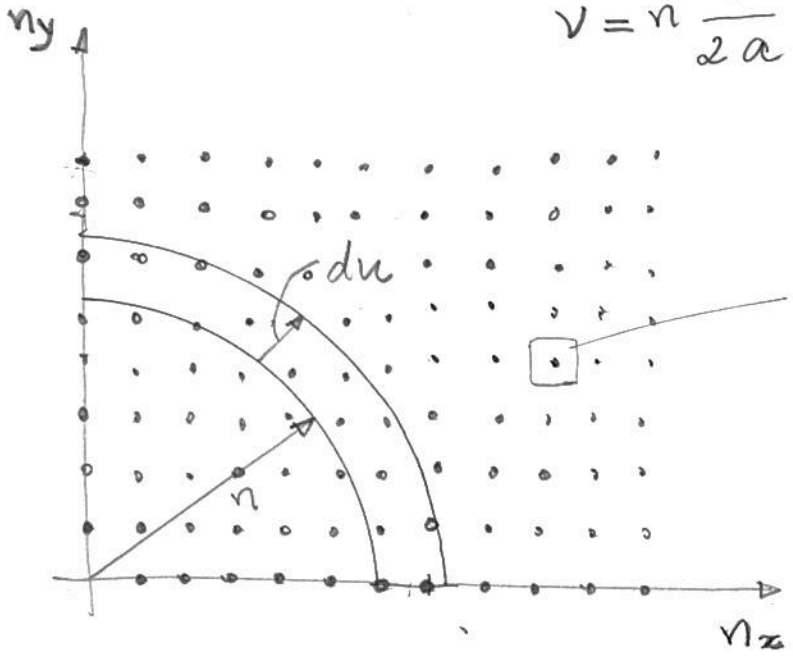
$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Definindo $n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$ → n não é inteiro. $n_x$, $n_y$ e $n_z$ é que são.

$$k = n\frac{\pi}{a}$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi\nu}{c} = n\frac{\pi}{a}$$

$$\nu = n\frac{c}{2a} \quad \text{ou} \quad n = \frac{2a}{c}\nu$$




cada ponto ocupa um volume unitário.

nº de pontos na casca de raio entre $n$ e $n+dn$:

$$N(n)\,dn = \frac{1}{8}\,4\pi n^2 dn$$

$$n = \frac{2a}{c}\nu \quad \Rightarrow \quad dn = \frac{2a}{c}\,d\nu$$

$$N(\nu)\,d\nu = 2 \times \frac{4\pi a^3}{c^3}\,\nu^2 d\nu$$

↓ 2 polarizações.

→ nº de ondas com freq entre $\nu$ e $\nu+d\nu$

Como $V = a^3$ (volume da cavidade),

$$N(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$$

ENERGIA MÉDIA DE UMA ONDA

* Teoria eletromagnética clássica.

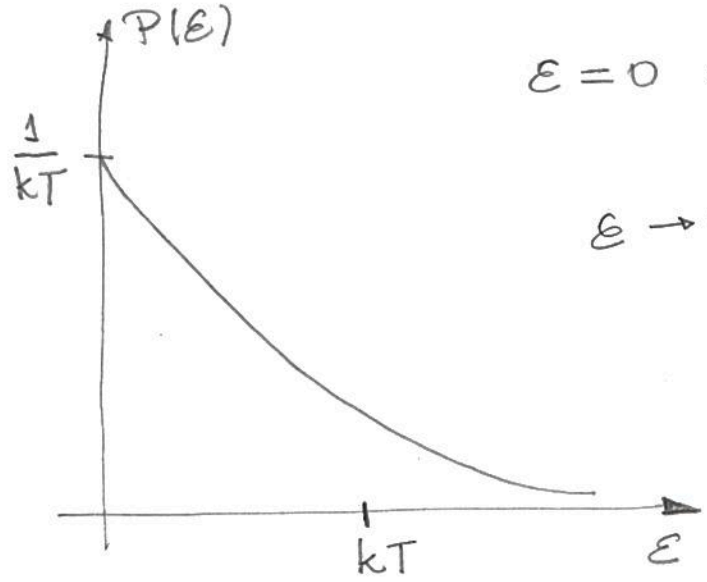
$\mathcal{E} \propto E^2$ $\quad$ $\mathcal{E}$ → campo elétrico, $\varepsilon$ → energia

$E$ e $\varepsilon$ podem assumir qqer valor.

$P(\varepsilon)\,d\varepsilon$ → probabilidade da onda possuir energia entre $\varepsilon$ e $\varepsilon + d\varepsilon$.

$$P(\varepsilon) = \frac{1}{kT} e^{-\varepsilon/kT}$$ → distribuição de Boltzmann

$k = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J/K$ → cte de Boltzmann




$\varepsilon = 0 \Rightarrow P = \frac{1}{kT}$

$\varepsilon \to \infty \Rightarrow P \to 0$

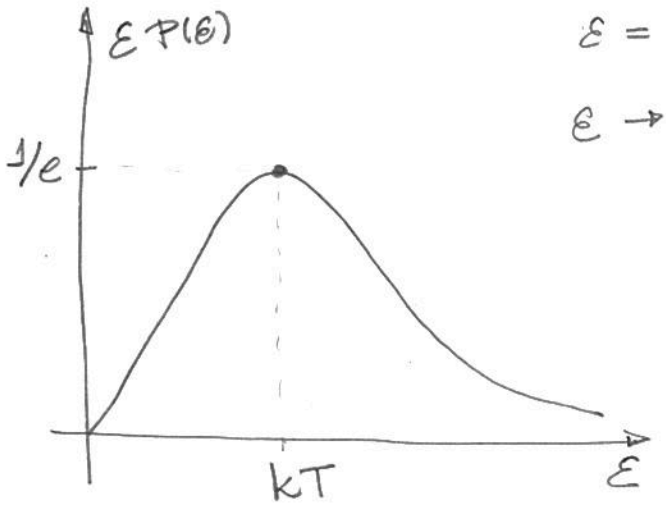
$$\int_0^\infty P(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{1}{kT}\int_0^\infty e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon = -e^{-\varepsilon/kT}\Big|_0^\infty = 1$$

probabilidade de que a onda possua qqer valor de energia, entre 0 e ∞.

a função de distribuição está normalizada

* Energia média da onda

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^\infty \varepsilon P(\varepsilon)\, d\varepsilon$$ ⟶ média ponderada $P(\varepsilon)$ é o peso!




$\varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon P(\varepsilon) = 0$

$\varepsilon \to \infty \Rightarrow \varepsilon P(\varepsilon) \to 0$

Máximo: $f(\varepsilon) = \varepsilon P(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{kT} e^{-\varepsilon/kT}$

$$\frac{df}{d\varepsilon} = \frac{1}{kT}\left\{-\frac{\varepsilon}{kT} + 1\right\} e^{-\varepsilon/kT}$$

$$\left.\frac{df}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon_{max}} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{max} = kT \quad \text{e} \quad f(kT) = \frac{1}{e}$$

* $\bar{\varepsilon}$ = área sob a curva

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^\infty \frac{\varepsilon}{kT} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$$ ⟶ Por partes com $u = \varepsilon$

$dv = \frac{1}{kT} e^{-\varepsilon/kT}$

$\Rightarrow v = -e^{-\varepsilon/kT}$

$$= \underbrace{-\varepsilon e^{-\varepsilon/kT}\Big|_0^\infty}_{\text{zero}} + \int_0^\infty e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$$

$$= kT\, e^{-\varepsilon/kT}\Big|_\infty^0 \Rightarrow \boxed{\bar{\varepsilon} = kT}$$

Teorema da equipartição da energia.

$\varepsilon(\nu)\,d\nu$ = energia das ondas com freq entre $\nu$ e $\nu+d\nu$

$$\varepsilon(\nu)\,d\nu = \bar{\varepsilon}\,N(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi kTV}{c^3}\nu^2 d\nu$$

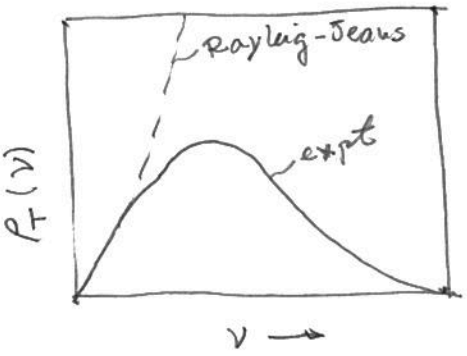
* Densidade de energia

$$\rho_T(\nu)\,d\nu = \frac{\varepsilon(\nu)\,d\nu}{V}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_T(\nu) = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2} \rightsquigarrow \text{fórmula de Rayleig-Jeans para a radiação de corpo negro}$$

$$R_T(\nu) = \frac{2\pi kT}{c^2}\nu^2$$

* Comparação com o experimento




A teoria clássica só reproduz o expt no caso $\nu \rightarrow 0$.

O gráfico sugere que para reproduzir o resultado experimental devemos ter:

$\bar{\varepsilon} = kT$ para $\nu \rightarrow 0$ pq leva a Rayleigh-Jeans que reproduz o result expt.

$\bar{\varepsilon} \rightarrow 0$ para $\nu \rightarrow \infty$ pq faria $\rho_T(\nu) \rightarrow 0$ como prevê o expt.

## 1.4 TEORIA DE PLANCK DA RADIAÇÃO DE CAVIDADE

Suponha que o espectro de energia seja discreto:

$$\varepsilon = 0, \Delta\varepsilon, 2\Delta\varepsilon, \cdots$$

A dist. de Boltzmau normalizada passa a ser

$$P(\varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{\sum_{\varepsilon} e^{-\varepsilon/kT}}$$

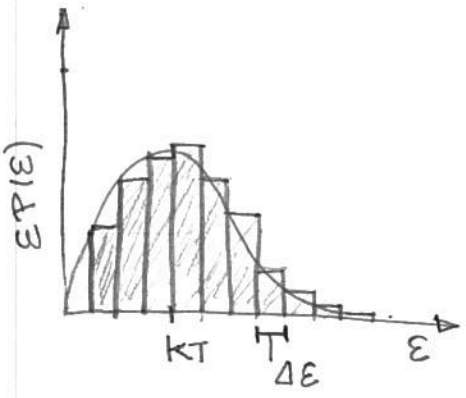
Note que $\sum_{\varepsilon} P(\varepsilon) = 1$.

A energia média é dada por

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{\varepsilon} \varepsilon P(\varepsilon)$$

* Análise gráfica:

1) $\Delta\varepsilon \ll kT$




$\bar{\varepsilon} \simeq$ área sob a curva

ou

$\bar{\varepsilon} \simeq kT$

Há um problema aqui. Os P(ε) contínuo e discreto têm dimensões diferentes.
Contínuo → P(ε) é prob por energia
Discreto → P(ε) é prob de fato.
Melhor seria definir a prob discreta como

$$P'(\varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon/kT}}{\sum_{\varepsilon} e^{-\varepsilon/kT}}$$

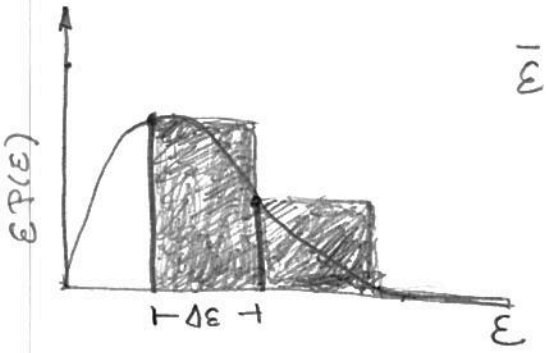
e $P(\varepsilon) = P'(\varepsilon)/\Delta\varepsilon$, que seria prob por energia. Assim

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{\varepsilon} \varepsilon P'(\varepsilon) = \sum_{\varepsilon} \varepsilon P(\varepsilon) \Delta\varepsilon$$

No limite $\Delta\varepsilon \to 0$, teríamos

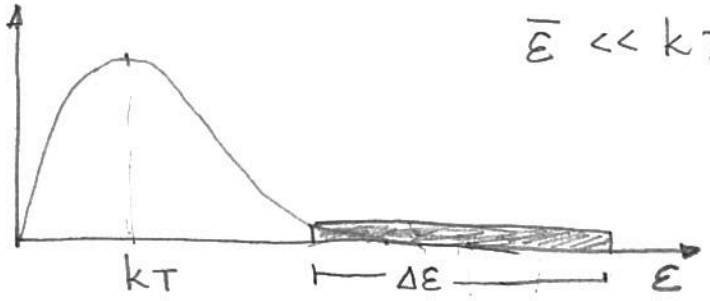
$$\bar{\varepsilon} = \int \varepsilon P(\varepsilon) d\varepsilon$$

2) $\Delta\varepsilon \simeq kT$




$\bar{\varepsilon} < kT$

3) $\Delta\varepsilon >> kT$




$\bar{\varepsilon} << kT$

Desejamos ter $\bar{\varepsilon} = kT$ p/ $\nu \to 0$

$\bar{\varepsilon} \to 0$ p/ $\nu \to \infty$

Uma forma de obter isso é fazer $\Delta\varepsilon$ uma função crescente de $\nu$.

* Proposta de Planck

$$\Delta\varepsilon = h\nu, \qquad h = cte$$

Assim

$$\varepsilon = nh\nu, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

* Cálculo de $\bar{\varepsilon}$ (Ex. 4)

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu\, e^{-nh\nu/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}}$$

$$\alpha = \frac{h\nu}{kT} \quad \Rightarrow \quad \bar{\varepsilon} = h\nu \; \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\, e^{-n\alpha}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

$$= -h\nu \; \frac{\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}}$$

$u \equiv u(\alpha) \Rightarrow \frac{d}{d\alpha} \ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{d\alpha}$.

A expressão acima é desse tipo, com $u = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$. Assim,

$$\bar{\varepsilon} = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha} = 1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \cdots$$ → PG infinita com $a_1 = 1$ e $q = e^{-\alpha}$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$$

$$\bar{\varepsilon} = -h\nu \frac{d}{d\alpha} \ln\left(\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\right)$$ → faça a derivada

$$\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{\alpha} - 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}}$$

* se $\nu \to 0$,

$e^{h\nu/kT} \simeq 1 + \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow \bar{\varepsilon} \to kT$ → como no caso contínuo.

se $\nu \to \infty$

$e^{h\nu/kT} \to \infty \Rightarrow \bar{\varepsilon} \to 0$

* Densidade de energia e radiância espectral.

$$\rho_T(\nu)\,d\nu = \frac{\bar{\varepsilon}\, N(\nu)\,d\nu}{V}$$

$$\boxed{\rho_T(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}\,d\nu}$$

$$R_T(\nu) = \frac{c}{4}\rho_T(\nu) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_T(\nu) = \frac{2\pi h}{c^2}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}}$$

* Planck determinou $h$ procurando valor que melhor reproduz os valores experimentais. O ajuste obtido foi muito bom. O valor atualmente aceito da cte de Planck é

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J.s}$$

* As leis de Stefan e de Wien podem ser obtidas a partir da fórmula de Planck (pbs 16 e 17).

* Espectro do corpo negro em termos de $\lambda$. (Ex. 5):

$$\rho_T(\lambda)\,d\lambda = -\rho_T(\nu)\,d\nu$$

↳ $\lambda$ diminui quando $\nu$ cresce

$$\rho_T(\lambda) = -\rho_T(\nu)\,\frac{d\nu}{d\lambda}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2}$$

$$\rho_T(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2}\,\rho_T(\nu) \quad \rightsquigarrow \text{ note que } \rho_T(\lambda) \text{ e } \rho_T(\nu) \text{ são funções diferentes.}$$

$$\rho_T(\lambda) = \frac{8\pi h}{c^2\lambda^2}\,\frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_T(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\,\frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}}$$

## 1.6 O POSTULADO DE PLANCK E SUAS IMPLICAÇÕES

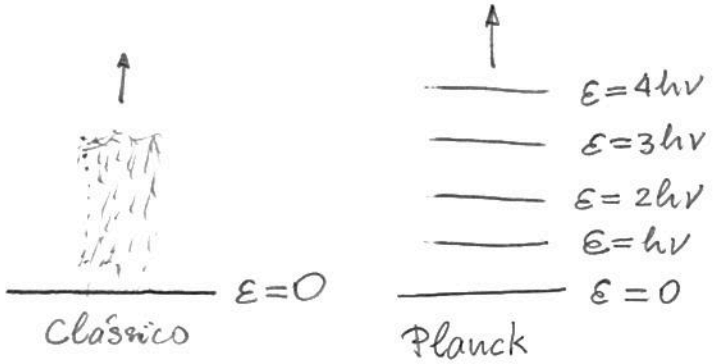
Postulado generalizado:

Qqer ente físico com 1 grau de liberdade cuja coordenada é função senoidal do tempo (MHS) pode assumir apenas valores de energia dados por

$$\varepsilon = n h \nu \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$n \rightarrow$ número quântico

A energia é quantizada.



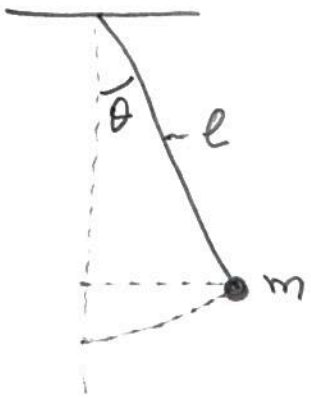
Ex. 6 Pêndulo simples amortecido.

Inicialmente:

$m = 0{,}01\ kg$

$\ell = 0{,}1\ m$

$\theta_m = 0{,}1\ rad$




$$E_0 = mg\ell(1 - \cos\theta_m)$$

$$E_0 = 5 \times 10^{-5}\ J$$

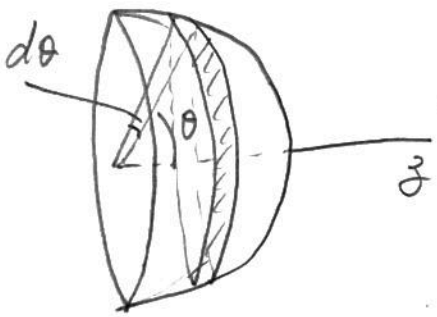
O pêndulo vai perdendo energia por atrito, mas só pode perder energia discretamente, em pacotes com

$$\Delta E = h\nu = h\,\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \simeq 10^{-33}\ J$$

Como $\Delta E \ll E_0$, a discretização da energia não é percebida.

Lista: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 16, 17 e 18.

**1.2** → sejam N ondas com freq. entre $\nu$ e $\nu+d\nu$ apontando em direções aleatórias




$$N(\theta)\,d\theta \propto 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

ou $N(\theta)\,d\theta = 1 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

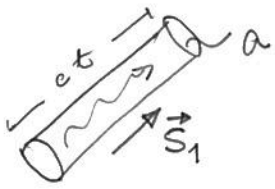
$$\int_0^{\pi} 1 \operatorname{sen}\theta\, d\theta = N$$

$$-1\cos\theta\Big|_0^{\pi} = N \Rightarrow 1 = \frac{N}{2}$$

$$\boxed{N(\theta)\,d\theta = \frac{N}{2}\operatorname{sen}\theta\, d\theta}$$

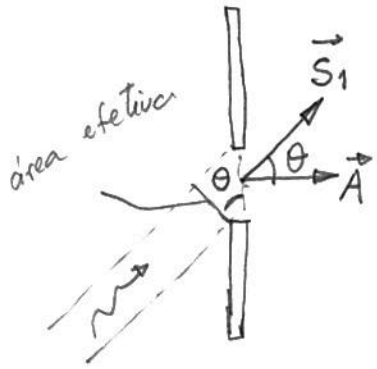
Para 1 onda:

$$P_1 = \frac{S_1\, a\, t}{a\, c\, t} = \frac{S_1}{c} \Rightarrow S_1 = c P_1$$




Fluxo de energia para fora

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{dt} = \vec{S}_1 \cdot \vec{A} = S_1 A \cos\theta$$




considerando todas as ondas com freq. entre $\nu$ e $\nu+d\nu$ (todas as direções)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int S_1 A \cos\theta\, N(\theta)\, d\theta = \frac{c P_1 A N}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

→ só $\nu$ fora

$$= \frac{c P_1 A N}{4} \operatorname{sen}^2\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{c A P_1 N}{4}$$

densidade associada às N ondas.

$$P_1 N \equiv P_T(\nu)\, d\nu \rightarrow$$

$$R_T(\nu)\, d\nu = \frac{d\mathcal{E}/dt}{A} = \frac{c}{4} P_1 N = \frac{c}{4} P_T(\nu)\, d\nu$$

$$\boxed{R_T(\nu) = \frac{c}{4} P_T(\nu)}$$