3. O POSTULADO DE DE BROGLIE: PROPRIEDADES ONDULATÓRIAS DAS PARTÍCULAS

3.1 ONDAS DE MATÉRIA

Em 1924 Louis de Broglie propôs que as relações $E = h\nu$ e $p = h/\lambda$ valem tanto para a radiação quanto para a matéria.

$$\lambda = \frac{h}{p} \rightsquigarrow \text{comprimento de onda de de Broglie.}$$

Ex. 3.1 (a) Para uma bola de beisebol com $m = 1{,}0\ kg$ e $v = 10\ m/s$.

$$\lambda = \frac{6{,}6 \times 10^{-34}\ J.s}{1{,}0\ kg \times 10\ m/s} = 6{,}6 \times 10^{-35}\ m$$

(b) Para um elétron com energia cinética de 100 eV.

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2mK}$$

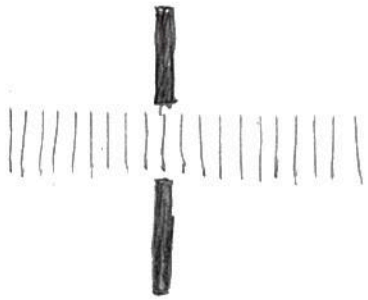
$$= [2 \times 9{,}1 \times 10^{-31}\ kg \times 100\ eV \times 1{,}6 \times 10^{-19}\ J/eV]^{1/2}$$

$$= 5{,}4 \times 10^{-24}\ kg.\ m/s$$

$$\lambda = \frac{6,6 \times 10^{-34}\ J.s}{5,4 \times 10^{-24}\ kg.m.s} = 1,2 \times 10^{-10}\ m = 1,2\ A^{\circ}$$

* As propriedades ondulatórias de elétrons de 100 eV podem ser observadas, mas não se espera detectar as ondas associadas a bolas de beisebol.

* Analogia com a ótica



$\lambda \ll a \Rightarrow$ ótica geométrica

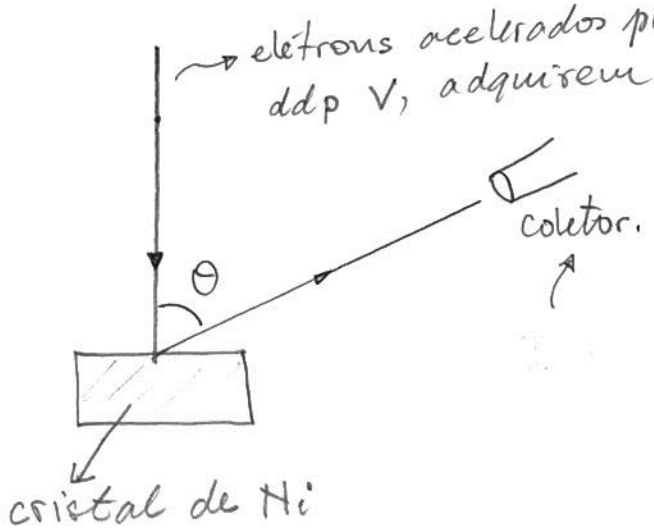
Não se observa características ondulatórias.

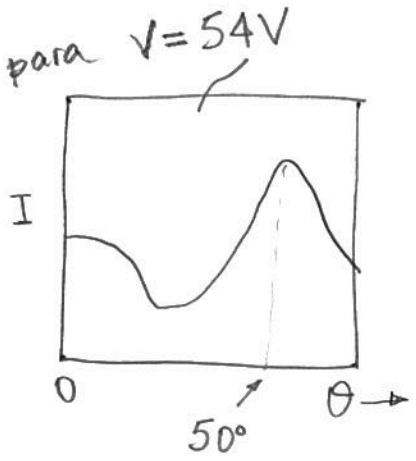


$\lambda \gtrsim a \Rightarrow$ ótica ondulatória

Difração de elétrons pode ser observada em cristais onde $a \sim 10^{-10}\ m$.

* O experimento de Davisson e Germer (1926)

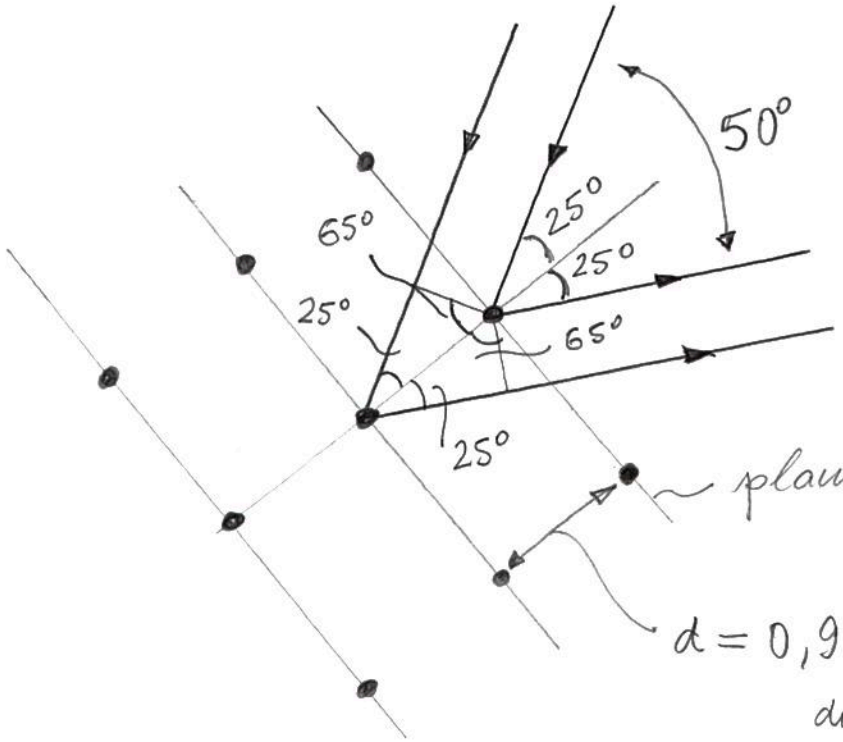




Para $V = 54\,V$, a corrente no coletor é máxima quando $\theta = 50°$.

I → corrente medida no coletor

* Interpretação:



~ planos cristalinos

$d = 0{,}91\,A^0$, medido por difração de raios X

$2d \operatorname{sen} 65° = n\lambda \qquad n = 1, 2, \ldots$ → condição de Bragg

1º pico $\Rightarrow n = 1 \Rightarrow 2d \operatorname{sen} 65° = \lambda \Rightarrow$ $\boxed{\lambda = 1{,}65\,A^0}$

De acordo com de Broglie, as ondas de elétros com $K = 54\,eV$ têm comprimento de onda dado por

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}} = \frac{6{,}63\times10^{-34}\ J.s}{[2\times9{,}11\times10^{-31}kg\times54eV\times1{,}60\times10^{-19}J/eV]^{1/2}}$$

$\lambda = 1{,}66\,A^\circ \rightsquigarrow$ muito bom acordo

conclusão: ondas de elétrons refletidas pelos planos do cristal interferem produzindo o padrão da figura.

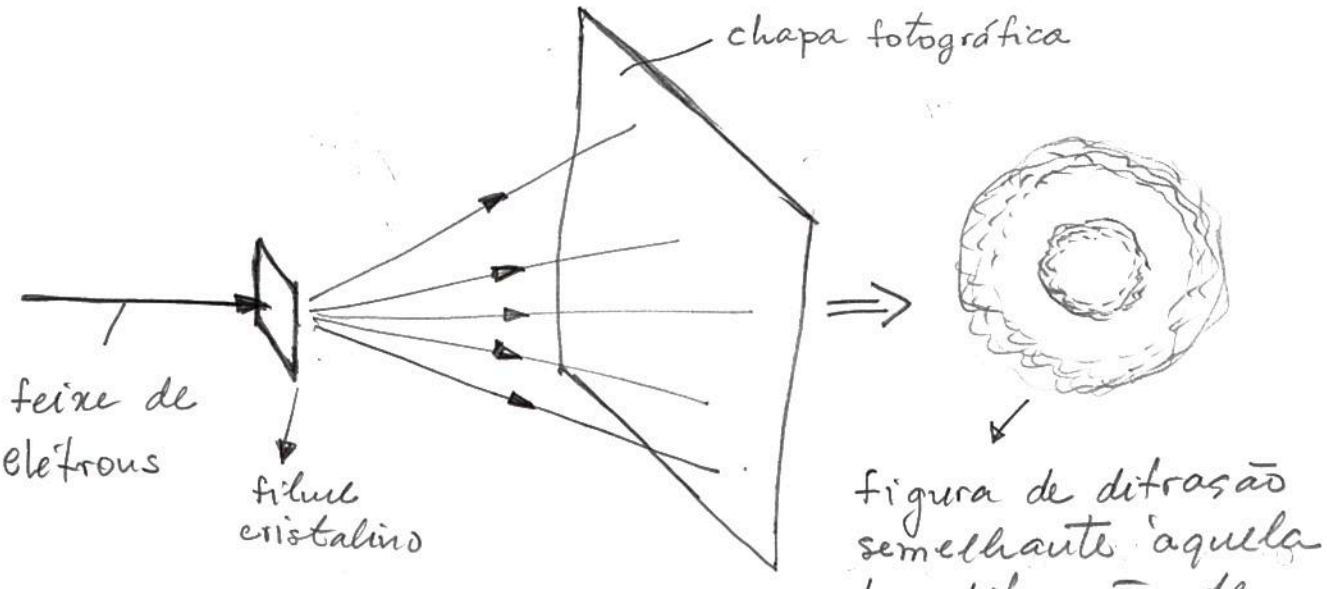
* Segundo pico:

$n=2 \Rightarrow 2d\,sen\,\varphi = 2\lambda$

$sen\,\varphi = \frac{\lambda}{d} = \frac{1{,}66\,A^\circ}{0{,}91\,A^\circ} = 1{,}82 \rightarrow$ não existe segundo pico, de acordo com a figura.

* O pico é largo pq os elétrons têm baixa energia e penetram pouco no cristal. O espalhamento se dá por poucos planos.

* A experiência de Thomson (1927)



* Experiências que mostram a difração de nêutrons e até átomos também foram realizadas posteriormente.

* Quando λ é muito pequeno (muito menor que a dimensão característica do aparato experimental) a natureza ondulatória da matéria não é vista.

3.2 A DUALIDADE ONDA-PARTÍCULA

* Tanto a matéria quanto a radiação se comportam às vezes como onda, às vezes como partícula.

* processos de emissão e absorção → partícula.

  propagação → onda

* Princípio da complementaridade de Bohr: um experimento que comprove o caráter ondulatório da matéria ou radiação não pode comprovar o seu caráter corpuscular, e vice-versa.

* Interpretação de Einstein para a dualidade fóton-onda eletromagnética.

Onda:

)))))) ⟶ $I = \frac{1}{\mu_0 c}\bar{\mathcal{E}}^2$ → Física IV

$\bar{\mathcal{E}}$ → valor médio (no tempo) do campo elétrico.

Fótons:

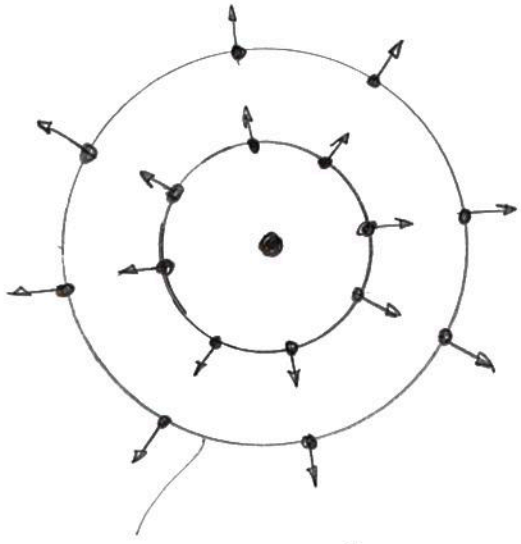


$I = \frac{dN}{dt} h\nu$

$\frac{dN}{dt} = \frac{\text{nº médio de fótons}}{\text{área} \times \text{tempo}}$ → o livro chama de N

Comparando: $\boxed{\frac{dN}{dt} \propto \bar{\mathcal{E}}^2}$ → onda com $\bar{\mathcal{E}}$ maior, carrega mais fótons.

* Um exemplo: fonte pontual



esferas imaginárias

$I = \frac{P}{4\pi r^2}$

ou $I \propto \frac{1}{r^2}$

$\bar{\mathcal{E}}^2 \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow |\bar{\mathcal{E}}| \propto \frac{1}{r}$

Em termos de fótons

$$\frac{dN}{dt} \propto \frac{1}{r^2}$$ → Os mesmos fótons atravessam ambas as áreas, mas $\boxed{\text{área} \propto r^2}$

* Densidade de energia

$$\rho = \frac{\text{energia}}{\text{volume}}$$

$$n = \frac{\text{nº médio de fótons}}{\text{volume}}$$

$$\rho = \epsilon_0 \bar{E}^2 = n h\nu$$

da Física IV

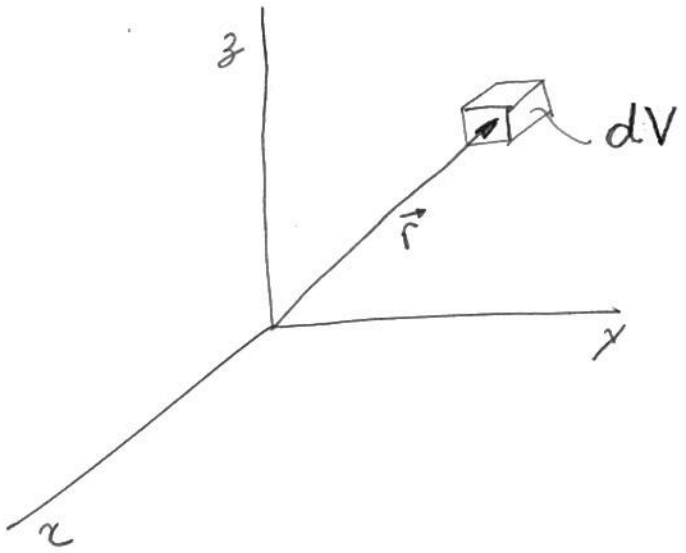
$$\boxed{n \propto \bar{E}^2}$$ → Não se sabe onde estão os fótons, mas $\bar{E}^2$ é proporcional à probabilidade de se encontrar um fóton em um dado volume.

* Generalização para a dualidade onda-partícula (Max Born, 1926)

$\Psi(\vec{r}, t)$ → função de onda associada à partícula (análoga ao campo elétrico)

$|\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$ → probabilidade de se encontrar a partícula em um volume dV, no ponto $\vec{r}$, no instante t.

$|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ → densidade de probabilidade, ou probabilidade por volume.



* princípio da superposição

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{E}}_1 + \vec{\mathcal{E}}_2 + \cdots$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \cdots$$

$\Rightarrow$ Interferência: as ondas podem interferir.

3.3 O PRINCÍPIO DA INCERTEZA

* De acordo com a mec. clássica, se conhecermos as posições e momentos de todas as partículas de um sistema, e também as forças que atuam sobre elas, podemos, em princípio, prever as posições e momentos dessas partículas em qqer instante futuro.

* Para medir de forma precisa a posição e o momento de uma partícula é preciso "perturbá-la", mas para partículas macroscópicas pode-se controlar essa perturbação de maneira que ela seja desprezível.

* No caso de partículas microscópicas, como elétrons, a perturbação em geral não é desprezível.

* Não é possível medir simultaneamente a posição e o momento de uma partícula de forma exata.

* Princípio da incerteza (Heisemberg, 1927):

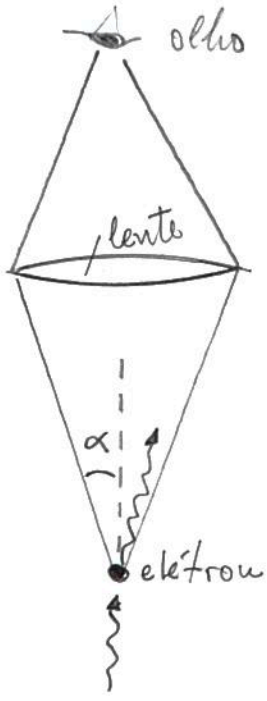
$$\Delta p_x \, \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \Delta p_x \, \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}$$

$\Delta x \rightarrow$ incerteza na medida da coordenada x

$\Delta p_x \rightarrow$ incerteza na medida da componente x do momento.

* Ilustração com um expt imaginário.



Vamos medir a posição de um elétron com um microscópio.

Para minimizar a "perturbação", vamos iluminá-lo com um único fóton.

Antes da colisão, o fóton tem momento $p = h/\lambda$, na direção vertical.

Após a colisão ele desvia, não sabemos para qual direção. Só sabemos que ele chegou à lente. Então há uma imprecisão na componente x do momento do fóton, dada por

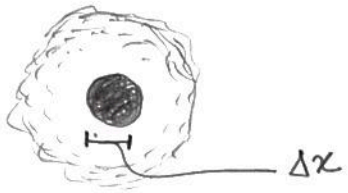
$$\Delta p_x = 2\,\frac{h}{\lambda}\,\text{sen}\,\alpha$$

vai de $-\frac{h}{\lambda}\,\text{sen}\,\alpha$ até $+\frac{h}{\lambda}\,\text{sen}\,\alpha$

Pela cons. do momento, o elétron adquire um momento na colisão, cuja imprecisão na componente x é dada pelo Δp_x acima.

Mas a imagem de um ponto no microscópio não é um ponto, e sim uma figura de difração, cujo diâmetro do máximo central é

$$\Delta x \simeq \frac{\lambda}{\text{sen}\,\alpha}$$



Então a posição do elétron é medida com essa imprecisão.

Quanto maior λ, menor será a imprecisão na medida do momento, mas maior a imprecisão na medida da posição, e vice-versa.

O produto das incertezas é

$$\Delta p_x \Delta x \simeq \frac{2h}{\lambda} \operatorname{sen}\alpha \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\alpha} = 2h > \frac{\hbar}{2}$$

* Se a radiação não fosse granular (composta de fótons) poderíamos em princípio iluminar o elétron com radiação de intensidade muito baixa e reduzir Δx e Δp a valores tão pequenos quanto desejássemos.

* O princípio da incerteza pode ser escrito em termos de outras coordenadas e momentos conjugados (mec. clássica II), com por exemplo $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$$\Delta p_y \Delta y \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta L_z \Delta \phi \geq \frac{\hbar}{2} \rightsquigarrow \text{momento angular e ângulo.}$$

* Existe mais uma relação associada com o princípio da incerteza:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$\Delta E \rightarrow$ incerteza na medida da energia

$\Delta t \rightarrow$ tempo característico para ocorrer mudanças no sistema.

* Para uma partícula livre

$$E = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{p_x^2}{2m}$$

$$\Delta E = \frac{p_x}{m} \Delta p_x \equiv v_x \Delta p_x$$ → incerteza na energia devida à incerteza no momento

se a medida de posição da partícula é feita durante um tempo Δt, ela tem uma imprecisão

$$\Delta x = v_x \Delta t \quad \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v_x}$$ → tempo para a partícula andar uma distância que se consegue medir.

Portanto

$$\Delta E \Delta t = \Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2\pi}$$

3.4 PROPRIEDADES DAS ONDAS DE MATÉRIA

* Partícula livre com momento definido:

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p}$$ é conhecido

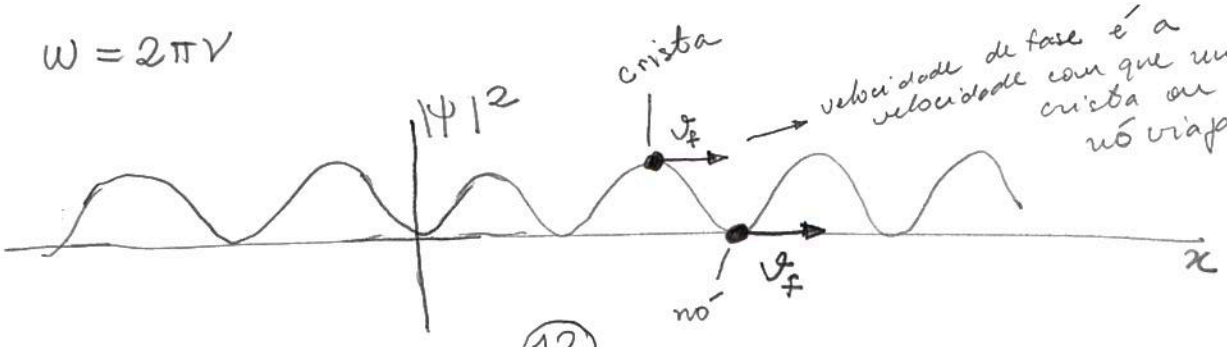
$$E = h\nu \quad \Rightarrow \nu = \frac{E}{h}$$ é conhecido

$$\Psi(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$ → função de onda com k e ω (λ e ν) definidos.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ → o livro define $\kappa = \frac{1}{\lambda}$. Eu vou trabalhar com k

capa e não k.

$\omega = 2\pi\nu$



A partícula pode estar em qqer lugar. Como sabemos exatamente o momento, não podemos saber nada sobre a posição da partícula (princípio da incerteza)

* Velocidade (de fase) da onda:

nós → pontos onde $\Psi(x,t) = 0$

$(kx - \omega t) = \pi n \qquad n = -\infty, \cdots -1, 0, 1, \cdots \infty$

$x = \frac{n\pi}{k} + \frac{\omega}{k} t \quad \rightarrow$ como um nó da onda viaja no tempo

A velocidade do nó (velocidade de fase da onda) é

$$v_f = \frac{\omega}{k} = 2\pi\nu \frac{\lambda}{2\pi} = \lambda\nu$$

* comparação com a velocidade da partícula

$$v_f = \lambda\nu = \frac{h}{p}\frac{E}{h} = \frac{E}{p}$$

$E = \frac{p^2}{2m}$ → partícula livre

$v_f = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$ → v = velocidade da partícula.

A velocidade de fase (da onda) é metade da velocidade da partícula, ou seja, a onda não acompanha a partícula. Uma onda senoidal não fornece uma descrição adequada de uma partícula livre com

imprecisões finitas na posição e no momento.

PACOTE COM DUAS ONDAS

Considere agora uma função de onda que é uma combinação de duas ondas senoidais com k's e ω's muito próximos.

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

onde

$$\Psi_1 = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$\Psi_2 = A \operatorname{sen}[(k+\Delta k)x - (\omega + \Delta\omega)t]$$

→ Vamos supor Δk e $\Delta\omega$ pequenos

como

$$\operatorname{sen}a + \operatorname{sen}b = \operatorname{sen}\left[\frac{(a+b)+(a-b)}{2}\right] + \operatorname{sen}\left[\frac{(a+b)-(a-b)}{2}\right]$$

$$= \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$+ \operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

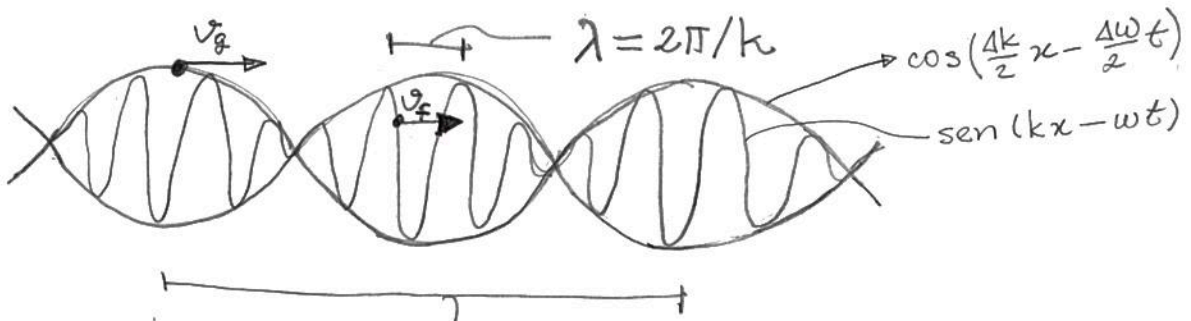
$$= 2\operatorname{sen}\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

$$= 2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

→ despregamos Δk e $\Delta\omega$ nesse argumento.

Temos uma onda dentro de uma onda-envelope, como mostra a figura.



$$\lambda_{env} = \frac{2\pi}{\Delta k/2} = \frac{4\pi}{\Delta k}$$

Velocidade de grupo (do pacote)

$$v_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

No limite $\Delta k \to 0$ e $\Delta\omega \to 0$,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Para a partícula livre,

$$E = h\nu = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = \hbar\omega$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k$$

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \quad \hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \boxed{v_g = v}$$

Note que
$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m}$
$= \frac{p}{2m}$
$v_f = \frac{v}{2}$

A velocidade de grupo (do pacote) é igual à velocidade da partícula.

Mas a onda acima ainda é deslocalizada: a partícula pode estar em qqer lugar!

PACOTE COM MUITAS ONDAS

Combinando-se muitas ondas senoidais pode-se obter pacotes de onda da forma



Nesse caso a função de onda é dada por

$$\Psi(x,t) = \sum_k A_k \operatorname{sen}[kx - \omega(k)t]$$

as ondas senoidais podem ter amplitudes diferentes

Em geral, ω é função de k. Para a partícula livre

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Mas apesar dos "pulsos" serem localizados, a onda acima tem um número infinito de pulsos e portanto a incerteza na posição da partícula ainda é infinita.

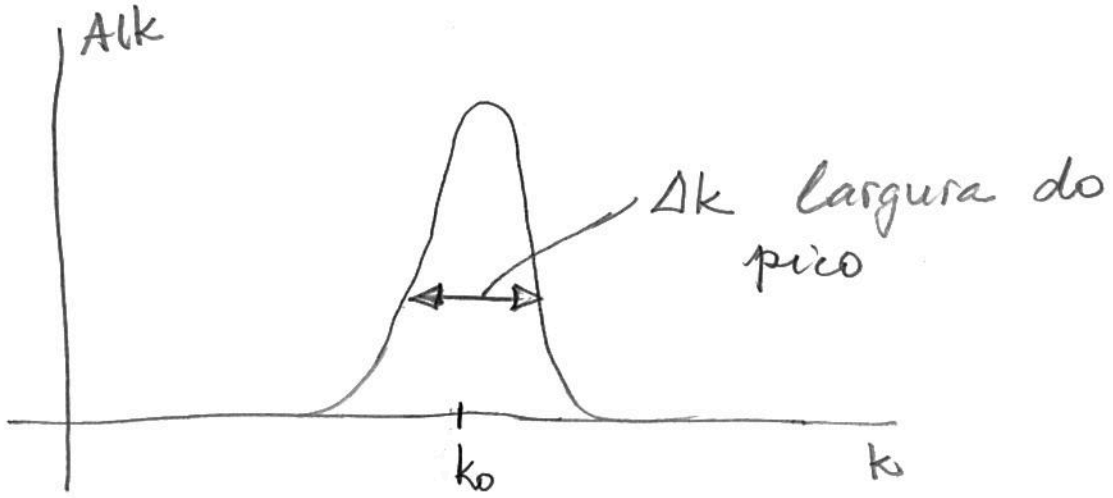
ESPECTRO CONTÍNUO

Uma função de onda na forma de um único pacote de onda (um único pulso) é obtida tomando-se uma superposição de um espectro contínuo

de ondas senoidais:

$$\Psi(x,t) = \int A(k)\, \text{sen}\,[kx - \omega(k)t]\, dk$$

Supondo que $A(k)$ seja uma função de k que é relevante somente em torno de k_0, como na fig abaixo,



pode-se mostrar que $\Psi(x,t)$ tem a forma de um pacote de onda com largura finita Δx



O pacote viaja com velocidade de grupo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

enquanto que a onda senoidal dentro do pacote viaja com velocidade de fase

$$v_f = \frac{\omega_0}{k_0}$$

INCERTEZAS

Como $p = \hbar k$, a incerteza no momento é $\Delta p = \hbar \Delta k$.

Pode-se mostrar que quanto mais largo for o pico de $A(k)$ (maior Δk), menor será a largura do pacote (menor Δx). De forma quantitativa, pode-se mostrar que

$$\Delta p \Delta x = \hbar \Delta k \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Lista: 1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 22, 23, 25, 26, 27.