A Interação do Campo Elétrico com uma Densidade de Carga

Marcos Estêvão Cardoso *

8 de dezembro de 2020

Resumo

1 Definição de Campo Elétrico

Consideremos o conjunto de cargas q_i atuando sobre a carga q. Mesmo na ausência da carga q, o espaço em torno das cargas q_i fica de algum modo alterado por aquelas cargas e, dessa forma, pronto para atuar na carga q uma vez ela seja reposta em sua posição. Diz-se então que as cargas q_i criam um *campo elétrico* no espaço vizinho. O valor do campo na posição da carga q é definido por (texto integral retirado de [1])

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k \sum \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \tag{1}$$

É importante dispor de uma definição operacional do campo elétrico, isto é, uma definição que permita sua medida em um ponto qualquer do espaço. É preciso tomar cuidado ao medir a força sobre uma carga em certo ponto, porque quando a referida carga é ali colocada pode haver uma pertubação na posição das cargas cujo campo vai ser medido. Utiliza-se então o que se denomina ***carga de prova***, que significa uma carga de valor tão minúsculo que sua presença não irá deslocar as outras cargas. É costumeiro escrever a equação (texto integral retirado de [1])

$$\vec{E} \equiv \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}(q)}{q}. \tag{2}$$

Nota-se que na prática esse limite não pode ser tomado rigorosamente, uma vez que a carga elétrica é quantizada.

Em muitas situações é também conveniente ignorar a quantização e considerar uma dada distribuição de cargas como um contínuo. Em um dado elemento de volume dV haverá uma quantidade de carga $dq = \rho dV$, onde ρ é a densidade local de cargas. O campo elétrico da distribuição será (texto integral retirado de [1])

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = k \int \frac{\rho(\vec{r})}{r^2} \hat{r} dV. \tag{3}$$

*Ruwindows

1.1 Carga de Prova

A ***carga de prova*** é utilizada para se medir o campo elétrico criado por outras cargas. Seu valor deve ser minúsculo o suficiente para que sua presença não desloque as cargas cujo campo está sendo medido (texto integral retirado de [1]).

1.2 Unidade de Campo Elétrico no S.I.

A unidade de campo elétrico no Sistema Internacional de Medidas [1, 2] é []

$$[E] = \frac{N}{C} = \frac{newton}{coulomb} \tag{4}$$

1.3 Linhas de Força (ou Linhas de Campo)

O conceito de campo elétrico foi introduzido por Faraday, que o representava pelas chamadas *linhas de força*. Estas constituem um modo muito prático de se visualizar o campo elétrico. São linhas contínuas definidas de tal modo que o campo elétrico é tangente a elas e a intensidade do campo é proporcional à densidade de linhas (número de linhas por unidade de área transversal) em cada ponto (texto integral retirado de [1]).

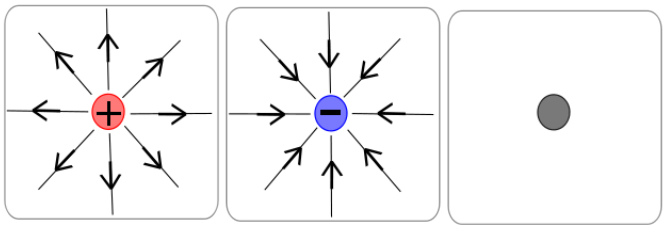

Figura 1: Linhas de forças do campo criado por uma carga positiva, negativa e neutra, da esquerda para a direita

Na figura 1 vê-se a representação por linhas de força do campo de uma carga positiva, negativa e a ausência das linhas em uma partícula neutra. A figura 2 mostra as linhas de força do campo criado por duas cargas de mesma intensidade (mesmo módulo) e sinais opostos.

No caso de uma carga isolada, as linhas de força divergem (irradiam) simetricamente da partícula para o infinito, se a carga for positiva (figura 1). Quando a carga é negativa (figura 1), as linhas de força convergem simetricamente do infinito para a partícula.

Quando há duas cargas isoladas de mesma intensidade e sinais opostos (figura 1), as linhas divergem da carga positiva e convergem na carga negativa. Nenhuma linha de força diverge para o infinito.

No caso de duas cargas isoladas de sinais opostos em que a carga positiva é mais intensa do que a negativa, uma parte das linhas que divergem da carga positiva converge para a carga negativa. A outra parte das linhas, corresponde à carga positiva que não está sendo neutralizada, diverge para o infinito.

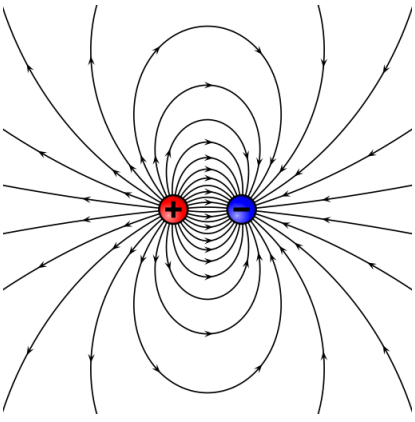

Figura 2: Linhas de força do campo criado por um par de cargas opostas de mesmo módulo

De modo geral, as cargas positivas são fontes (divergências) de linhas de força e as negativas são sumidouros (convergências) dessas linhas. Nenhuma linha de força

se interrompe em um ponto do espaço onde não haja carga elétrica. Uma vez estando familiarizados com as regras, não nos será difícil desenhar qualitativamente as linhas de força de muitas distribuições de carga de interesse (texto adaptado de [1]).

2 O Campo Elétrico Gerado por Uma Carga Pontual

A equação para o módulo do campo produzido por uma carga pontual pode ser escrita de forma vetorial [3]. Se a carga Q estiver na origem, o resultado obtido é:

$$\vec{E} = \frac{k\,Q}{r^2}\vec{e}_r \tag{5}$$

sendo r a distância até a origem, e $\vec{e}_r$ o vetor unitário que aponta na direção radial, afastando-se da carga. Se a carga for negativa, a equação anterior continua válida, dando um vetor que aponta no sentido oposto de $\vec{e}_r$ (campo atrativo). O vetor unitário $\vec{e}_r$ calcula-se dividindo o vetor posição $\vec{r}$ pelo seu módulo, r. Se a carga não estiver na origem mas numa posição $\vec{r}_1$ a equação acima pode ser generalizada facilmente, dando o resultado [3]:

$$\vec{E} = \frac{k\,Q(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} \tag{6}$$

O campo produzido por um sistema de cargas pontuais obtém-se somando vetorialmente os campos produzidos por cada uma das cargas. Por exemplo o lado esquerdo na figura 3 mostra os campos produzidos por duas cargas pontuais de $4nC$ e $9nC$ em alguns pontos. O lado direito mostra o campo resultante, obtido somando vetorialmente os dois campos. A equação anterior pode ser generalizada para um sistema de n cargas pontuais. Vamos escrever a equação explicitamente, em função das coordenadas cartesianas no plano xy (a generalização para o espaço xyz será evidente). Se as cargas $q_1, q_2, ..., q_n$ estiverem nos pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$, , o resultado é (texto integral retirado de [2]):

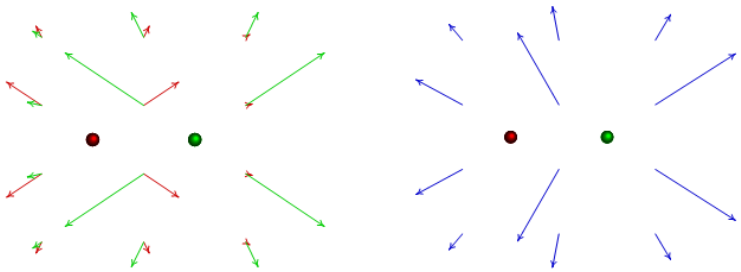

Figura 3: Campos produzidos por duas cargas de $4nC$ e $9nC$ em alguns pontos (lado esquerdo) e o campo resultante nesses pontos (lado direito).

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{k\,q_i\,(x-x_i)}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{3/2}}\right]\vec{e}_x + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{k\,q_i\,(y-y_i)}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{3/2}}\right]\vec{e}_y \tag{7}$$

3 Princípio da Superposição

A maioria dos modelos que representam fenômenos físicos são lineares. Por exemplo: a interação gravitacional entre três partículas pode ser considerada como a composição da interação aos pares

dessas partículas. Isso acontece por causa do Princípio da Superposição. Este mesmo fenômeno está presente na interação entre campos elétricos (texto adaptado de [4]).

Assim, se $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$ são forças de diferentes origens que atuam sobre a mesma partícula e $\vec{F}$ é a força resultante que atua sobre a partícula, temos que, $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n$ onde a soma é vetorial (para n = 2, obedece à regra do paralelogramo). Este é um resultado experimental, conhecido como princípio de superposição de forças [5].

Aplicaremos o *Princípio da Superposição* para calcular o campo resultante produzido por uma densidade de cargas. O que está relacionado ao conceito apresentado na equação (7) quando, ao invez de termos um vetor posição $\vec{r} = (x, y, z)$ teremos um vetor infinitesimal $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$.

4 O Campo Elétrico Gerado por uma Densidade de Carga

A densidade de carga linear, superficial ou volumétrica é uma quantidade de carga elétrica em uma linha, superfície ou volume respectivamente. Ela é medida em Coulombe por metro (C/m), metro quadrado (C/m^2), ou metro cúbico (C/m^3), respectivamente. Como existem cargas positivas e negativas, a densidade pode tomar também valores negativos. Assim como qualquer densidade, ela depende da sua posição. Ela não deve ser confundido densidade de portadores de carga. Como relatado na química, a densidade de carga pode se referir a distribuição sobre o volume de uma partícula, átomo ou molécula. Assim, um cátion de lítio possui mais densidade de carga do que um cátion de sódio, pois o sódio possui raio atômico maior (texto integral retirado de [6]).

A integral da densidade de carga $\alpha_q(\mathbf{r})$, $\sigma_q(\mathbf{r})$, $\rho_q(\mathbf{r})$ sobre a linha l, superfície S, ou volume V, é igual a carga total Q desta região, definida como [7]:

$$Q = \int_L \alpha_q(\mathbf{r})\,\mathrm{d}l \qquad Q = \int_S \sigma_q(\mathbf{r})\,\mathrm{d}S \qquad Q = \int_V \rho_q(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V. \tag{8}$$

Esta relação define densidade de carga matematicamente. Note que alguns símbolos utilizados para denotar várias dimensões podem variar dependendo do campo de estudo. Comumente a notação utilizada é λ, σ, ρ; ou ρ_l , ρ_s , ρ_v para (C/m), (C/m^2), (C/m^3) respectivamente.

4.1 Densidade Linear de Carga

4.1.1 O Campo Elétrico Gerado por um Semi Círculo

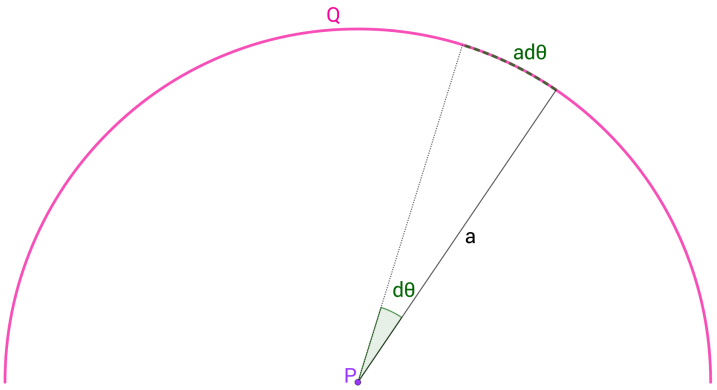

Figura 4: Representação de um semicírculo carregado com uma densidade de carga. Visualização em 2D

Quando uma carga Q é distribuída uniformemente sobre um fio semicircular de raio a, podemos calcular o campo elétrico sentido sobre um ponto colocada no centro, como mostrado na figura 4.

Cada elemento de comprimento dl do fio, com carga dQ,contribui com uma força dF sobre a carga $(-q)$. Sendo λ a densidade linear de carga no fio, temos

$$Q = \frac{\lambda \cdot (2\pi \cdot a)}{2} = \lambda \pi a \tag{9}$$

ou

$$dQ = \lambda dl = \lambda a d\theta \tag{10}$$

Em coordenadas polares, tem-se:

$$x = a\cos\theta \quad y = a\sin\theta \tag{11}$$

$$d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{dQ}{a^2}\cdot\left(a\cos\theta\hat{i} + a\sin\theta\hat{j}\right) \tag{12}$$

Usando a relação estabelecida em (10) ,temos

$$d\mathbf{E} = \frac{\lambda a}{4\pi\epsilon_0 a^2}\cdot d\theta\cdot\frac{a\cdot\left(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}\right)}{a} \tag{13}$$

Integrando em ambos os lados da equação (13) podemos desenvolver:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a}\int_0^{\pi}\left(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}\right)d\theta, \tag{14}$$

logo

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cdot 2\hat{j} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\cdot\frac{\pi a}{\pi a}\hat{j} = \frac{\lambda\pi a}{2\pi^2\varepsilon_0 a^2}\hat{j} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{j} \tag{15}$$

4.1.2 O Campo Elétrico Gerado por um Fio Infinito

Podemos pensar em um fio infinito com uma densidade uniforme de cargas. Seja λ a densidade linear de carga, ou seja a quantidade de carga por unidade de comprimento. A figura 5 mostra o campo $d\mathbf{E}$ gerado pelo elemento de fio de comprimento dx, para o caso em que λ é positivo.

Da figura obtém-se

$$d\mathbf{E} = k\frac{\lambda dx}{r^2}\left(-\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j}\right) \tag{16}$$

$$x = a\tan\theta \tag{17}$$

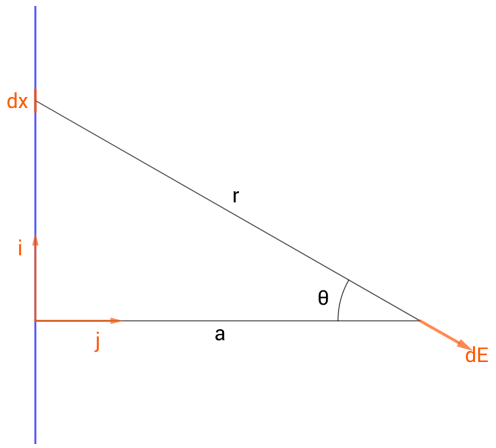

Figura 5: Parte de um fio infinito com densidade uniforme de carga e o esquema utilizado para o cálculo do campo elétrico. Visualização em 2D

Logo, a relação que encontramos para a distância r, do elemento dx até o ponto, é

$$r = a\sin\theta \tag{18}$$

Da equação (17) obtém-se

$$dx = a\sec^2\theta \quad d\theta, \tag{19}$$

que, combinado com a equação (18), conduz a

$$\frac{dx}{r^2} = \frac{1}{a}d\theta \tag{20}$$

A equação (16) pode ser agora reescrita na forma

$$d\mathbf{E} = k\frac{\lambda}{a}\left(-\mathbf{i}\sin\theta d\theta + \mathbf{j}\cos\theta d\theta\right) \tag{21}$$

O campo elétrico será então [1]

$$E = -k\frac{\lambda}{a}i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta + k\frac{\lambda}{a}j\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = 2k\frac{\lambda}{a}j \tag{22}$$

4.2 Densidade Superficial de Carga

4.2.1 O Campo Elétrico Gerado por um Plano Infinito

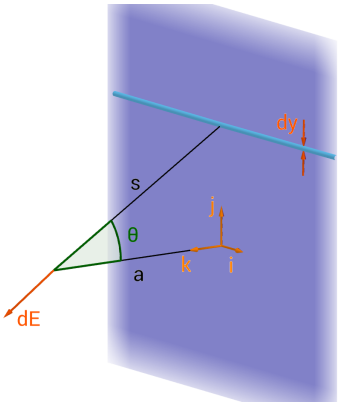

Figura 6: Parte de um plano infinito com densidade uniforme de carga e o esquema utilizado para o cálculo do campo elétrico. Visualização em 3D

Para calcular o campo criado por um plano infinito com densidade uniforme σ de carga vamos utilizar o resultado apresentado na seção 4.1.2 para se calcular o campo criado pelo plano. O plano será dividido em fitas de largura diferencial dy, como mostra a figura 6. Cada fita cria um campo diferencial $d\mathbf{E}$ que, por sua vez, é dado por uma expressão análoga a equação (22) . A densidade linear de carga da fita será

$$d\lambda = \sigma dy \tag{23}$$

O campo ciado pela fita no ponto P será

$$d\mathbf{E} = 2k\frac{\sigma dy}{s}\hat{s} \tag{24}$$

Por simetria, podemos concluir que somente a componente z do campo total não será nula. Portanto, podemos escrever

$$E = 2k\sigma\mathbf{k}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\theta\frac{dy}{s} \tag{25}$$

Sabendo que

$$y = a\tan\theta, \quad dy = a\sec^2\theta d\theta, \quad s = a\sec\theta \tag{26}$$

Substituindo esses valores na equação (25) , obtemos [1]

$$\mathbf{E} = 2k\sigma\mathbf{k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta = 2\pi k\sigma\mathbf{k} \tag{27}$$

4.2.2 O Campo Elétrico Gerado por um Disco

Agora iremos calcular o campo de um disco circular com densidade uniforme de carga, em Pontos sobre seu eixo de simetria A figura tal mostra o disco de raio R, com densidade de carga positiva σ, Dividido em anéis de raio variável ρ e largura diferencial $d\rho$.

As componentes do campo perpendiculares ao eixo z de simetria do anel se cancelam, de forma que o anel gera no ponto P o campo

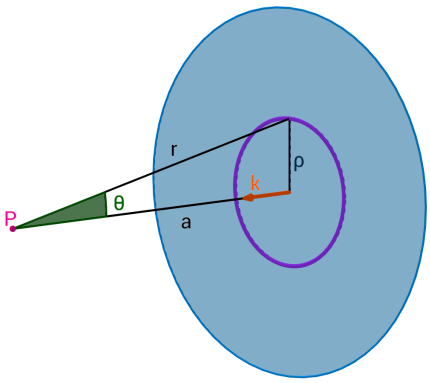

Figura 7: Disco com densidade uniforme de carga e esquema utilizado para o cálculo do campo elétrico sobre o eixo do disco. Visualização em 3D

$$d\mathbf{E} = k\frac{\sigma dA}{r^2}\cos\theta\mathbf{k} = k\frac{\sigma dA}{r^2}\frac{a}{r}\mathbf{k} \quad (28)$$

Considerando que

$$dA = 2\pi\rho d\rho, \quad r = \sqrt{a^2+\rho^2} \quad (29)$$

obtemos

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = k\pi a\int_0^R \frac{2\rho d\rho}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{k} = k\pi a\frac{-2}{\sqrt{a^2+\rho^2}}\mathbf{k}\Big|_0^R \quad (30)$$

Finalmente, obtemos

$$\mathbf{E} = 2\pi\sigma k\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)\mathbf{k} \quad (31)$$

Ressalta-se que no limite $R\to\infty$ a equação (31) se transforma na equação (27), como era de se esperar [1].

4.3 Densidade Volumétrica de Carga

4.3.1 O Campo Elétrico Gerado por uma Casca Esférica

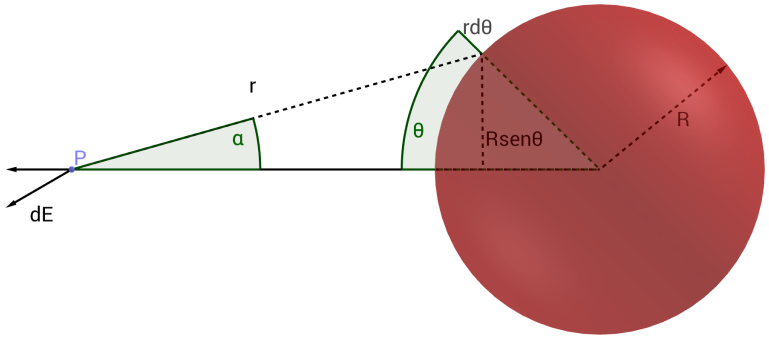

Figura 8: Casca Esférica com densidade uniforme de carga e esquema utilizado para o cálculo do campo elétrico a uma distância maior que o seu raio. Visualização em 3D

Para calcular, o campo elétrico gerado dentro e fora de uma casca esférica, com densidade de carga uniforme, temos:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad (32)$$

$$dQ = \sigma dA = \sigma\left(2\pi R\sin\theta\right)Rd\theta$$

$$= \sigma 2\pi R^2\sin\theta d\theta \quad (33)$$

A componente x do campo elétrico pode ser escrita da seguinte forma:

$$dE_x = \frac{kdQ}{r^2}\cos\alpha = \frac{k\sigma 2\pi R^2 \sin\theta d\theta}{r^2}\cos\alpha \tag{34}$$

Se valendo das relações trigonométricas:

$$r^2 = x^2 + R^2 - 2xR\cos\theta \tag{35}$$

$$2dr = 2xR\sin\theta d\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{rdr}{xR} \tag{36}$$

$$R^2 = x^2 + r^2 - 2xr\cos\alpha \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{x^2 + r^2 - R^2}{2xr} \tag{37}$$

Podemos escrever:

$$dE_x = \frac{k\sigma 2\pi R^2}{r^2}\frac{rdr}{xR}\frac{x^2 + r^2 - R^2}{2xr} = \frac{k\sigma\pi R}{x^2}\left(1 + \frac{x^2 - R^2}{r^2}\right)dr \tag{38}$$

$$E_x = \frac{k\sigma\pi R}{x^2}\int_{x-R}^{x+R}\left(1 + \frac{x^2 - R^2}{r^2}\right)dr \quad = \quad \frac{k\sigma\pi R}{x^2}\left[r - \frac{x^2 - R^2}{r}\right]_{x-R}^{x+R} \tag{39}$$

Aplicando os limites de integração:

$$= \frac{k\sigma\pi R}{x^2}\left[(x+R) - (x-R) - \left(x^2 - R^2\right)\cdot\left(\frac{1}{x+R} - \frac{1}{x-R}\right)\right] \tag{40}$$

$$= \frac{k\sigma\pi R}{x^2}\left[2R - \left(x^2 - R^2\right)\cdot\frac{(r-R) - (r+R)}{(x+R)(x-R)}\right] \tag{41}$$

O que nos retorna:

$$= \frac{k\sigma\pi R}{x^2}(2R + 2R) \quad = \quad \frac{4k\sigma\pi R^2}{x^2} \tag{42}$$

Substituindo (32) em (42), chegamos ao resultado

$$E_x = k\frac{Q}{x^2} \tag{43}$$

Pela equação (43), podemos ver que consequentemente o campo elétrico gerado é idêntico ao de uma carga colocada no centro da casca. Para o campo no interior da casca, deve-se alterar os limites de integração:

$$E_x = \quad \frac{k\sigma\pi R}{x^2}\left[r - \frac{x^2 - R^2}{r}\right]_{R-x}^{x+R} \quad = \quad 0 \tag{44}$$

Este efeito é conhecido como blindagem eletrostática, pode ser observado nos átomos e é amplamente utilizado pela tecnologia.

4.3.2 O Campo Elétrico Gerado por uma Esfera Maciça

O campo de uma esfera, pode ser calculado pela soma dos campos de n cascas de espessura infinitesimal, portanto

$$E_r = \frac{k}{r}\int_n dQ \quad = \quad \frac{kQ}{r^2} \tag{45}$$

Para campos no interior da esfera, a carga que entra no cálculo, é devida às cascas no interior do ponto:

$$Q_r = \rho\frac{4\pi r^3}{3} \quad = \quad \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}r^3 \quad = \quad \frac{Qr^3}{R^3} \tag{46}$$

$$E_{r<R} = \frac{kQ_r}{r^2} \quad = \quad \frac{kQ}{R^3}r \tag{47}$$

Referências

[1] Alaor Chaves. *Física básica: eletromagnetismo*. LTC, 2007.

[2] Wikipédia. Campo elétrico - disponível em: `https://goo.gl/31Ctye`, jul 2017.

[3] Jaime E Villate. Electricidade, magnetismo e circuitos. 2013.

[4] Wikipédia. Princípio da superposição - disponível em: `https://goo.gl/QAmQeu`, mar 2017.

[5] H Moysés NUSSENZVEIG. Curso de física básica, volume 1, são paulo: E.

[6] Wikipédia. Densidade de carga - disponível em: `https://goo.gl/xSdzeo`, out 2016.

[7] Western Washington University. Spacial charge distributions - disponível em: `wwu.edu`, out 2016.