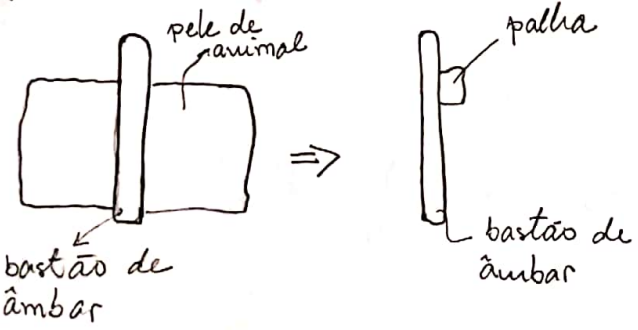
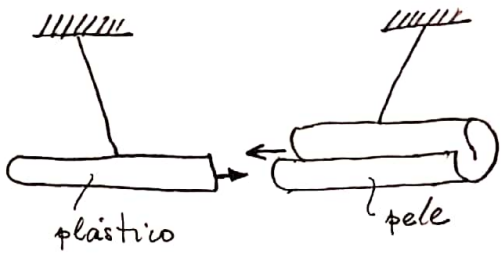
1. CARGA ELÉTRICA E CAMPO ELÉTRICO

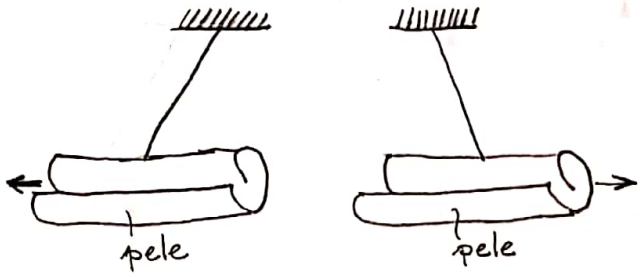
CARGA ELÉTRICA

Os gregos descobriram, por volta de 600 aC., que um bastão de âmbar (uma resina vegetal) quando atritado com pele de animal é capaz de atrair pequenos objetos, como um pedaço de palha.



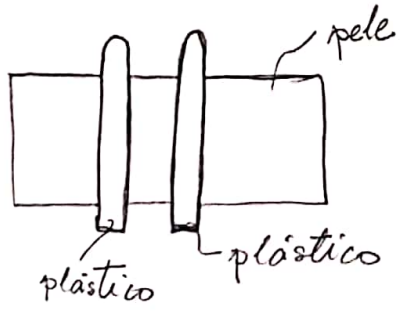
A explicação moderna é que durante o atrito elétrons passam da pele para o âmbar que fica eletrizado. O âmbar eletrizado atrai a palha.

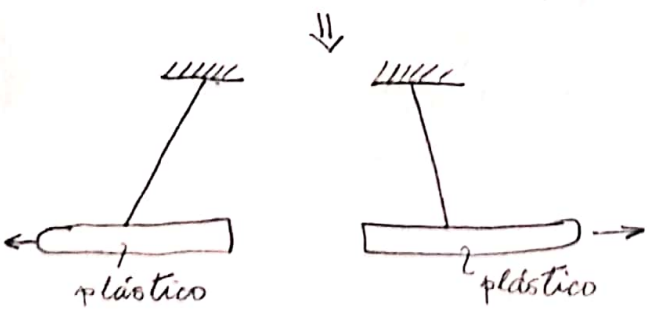




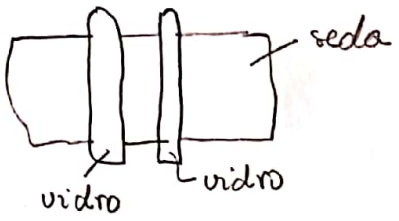
OUTRAS EXPERIÊNCIAS

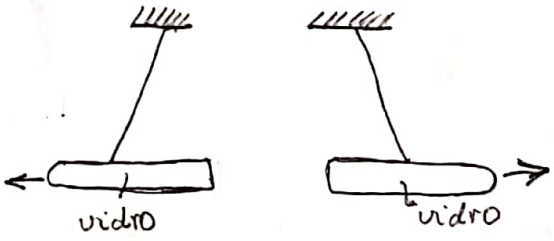
(1)

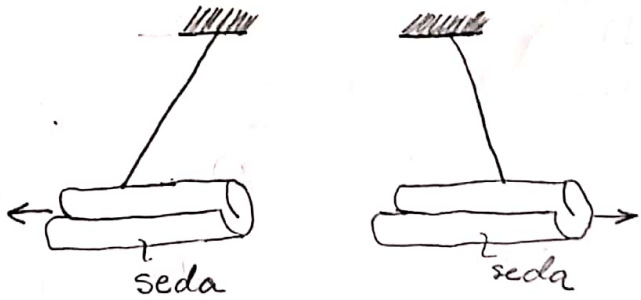


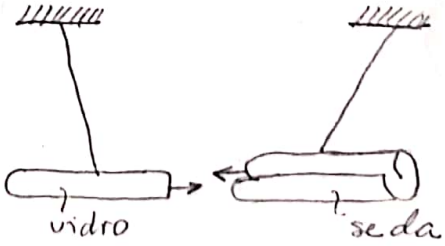


(2)



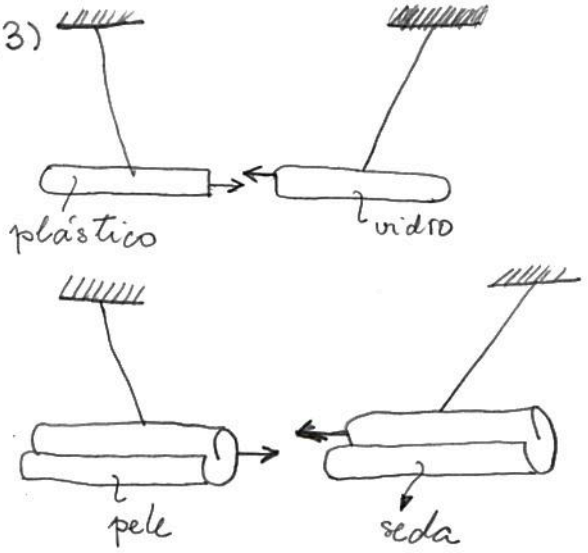






Digitalizado com CamScanner

(3)



Conclusões:

(1) Existem dois tipos de carga:

vidro, pele → positiva

plástico, seda → negativa

Os nomes "carga positiva" e "carga negativa" foram dados por Benjamin Franklin.

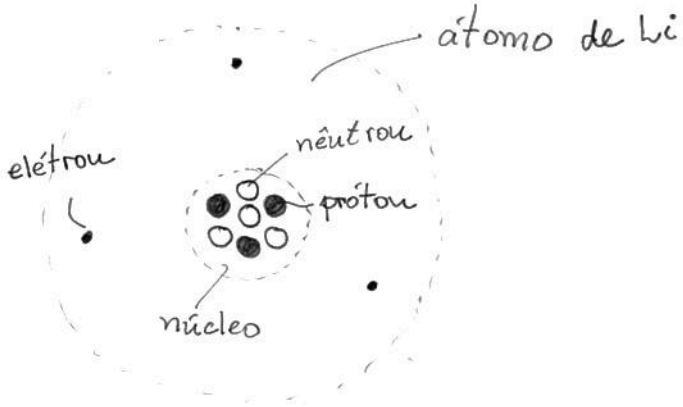
(2) Cargas do mesmo tipo (mesmo sinal) se repelem e cargas de tipos diferentes (sinais contrários) se atraem.

A explicação moderna para a eletricidade é que a matéria é composta de átomos e os átomos são compostos de partículas mais elementares que possuem carga elétrica. São elas:

elétron: carga $-e$
massa $9{,}109 \times 10^{-31}$ kg

próton: carga $+e$
massa $1{,}673 \times 10^{-27}$ kg

nêutron: carga 0
massa $1{,}675 \times 10^{-27}$ kg



Tamanho do átomo $\sim 10^{-10}$ m

Tamanho do núcleo $\sim 10^{-15}$ m

Prótons e nêutrons se mantêm juntos no núcleo por meio da força nuclear.

Dentro do núcleo

$F_{nuclear} > F_{elétrica}$

mas fora do núcleo

$F_{nuclear} \ll F_{elétrica}$

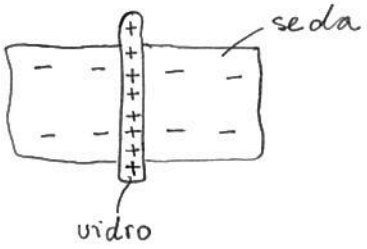
Em um átomo neutro o número de elétrons é igual ao número de prótons. Este número é chamado número atômico.

PRINCÍPIO DA CONSERVAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA

"Em qualquer processo físico a carga elétrica total se conserva".

Exemplos:

(1)



Durante o atrito elétrons passam do vidro para a seda. A carga positiva do vidro é igual (em módulo) à carga negativa da seda.

(2) Decaimento do nêutron.

$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$

p^+: próton; e^-: elétron; $\bar{\nu}$: antineutrino do elétron

A carga elétrica total é conservada: é zero antes e depois do decaimento.

(3) Produção de um par elétron – pósitron

$\gamma \rightarrow e^- + e^+$

γ: raio gama: carga zero; e^-: elétron: carga $-e$; e^+: pósitron: carga $+e$

(4) Aniquilação de um par elétron – pósitron.

$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$

PRINCÍPIO DA QUANTIZAÇÃO DA CARGA ELÉTRICA

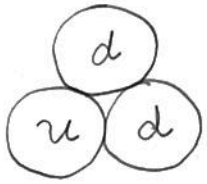
"Toda carga elétrica é um múltiplo inteiro (positivo ou negativo) da carga do próton".

Obs. Os prótons e nêutrons são formados por partículas mais elementares chamadas quarks que possuem cargas $\pm \frac{1}{3}e$ e $\pm \frac{2}{3}e$. Contudo um quark nunca é encontrado sozinho. Eles estão sempre em grupos de três com carga total 0 ou $+e$.

quark up $\rightarrow$ $q = +\frac{2}{3}e$

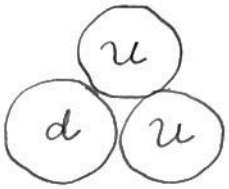
quark down $\rightarrow$ $q = -\frac{1}{3}e$

nêutron:



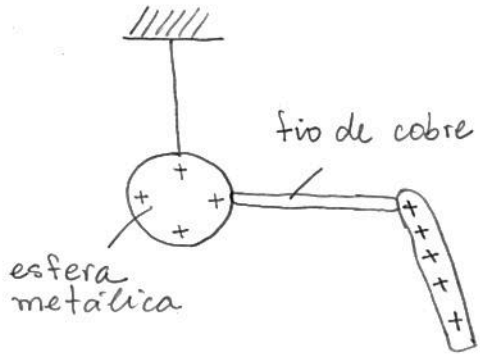
$q = 0$

próton:



$q = +e$

CONDUTORES E ISOLANTES



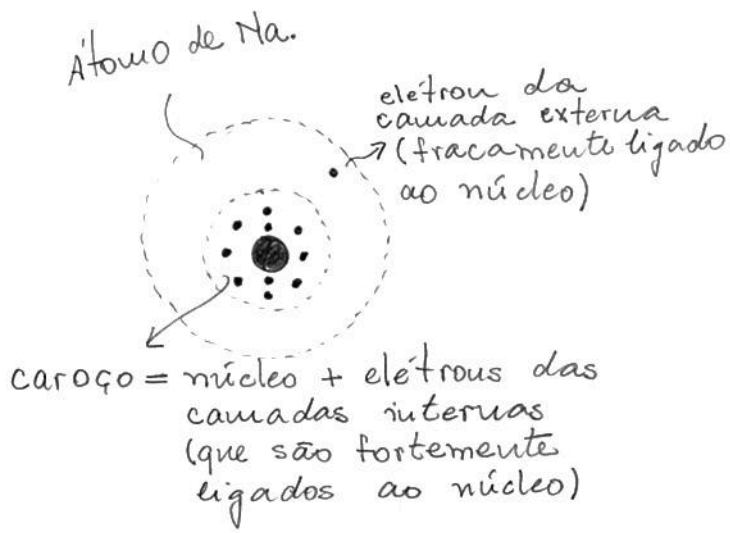
Se tocarmos no fio de cobre com o bastão carregado, a esfera ficará carregada. Isto ocorre porque o cobre é um condutor de eletricidade. Parte da carga do bastão se transfere para a esfera através do fio de cobre.

Se no lugar do fio de cobre tivéssemos um fio de náilon, a esfera não ficaria carregada porque o náilon é um isolante, ou seja, cargas elétricas não podem passar através do náilon.

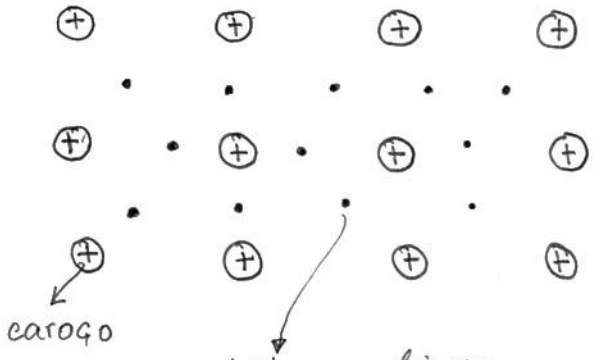
O que determina se um material é condutor ou isolante é o tipo de ligação química.

(1) LIGAÇÃO METÁLICA:
MATERIAL CONDUTOR

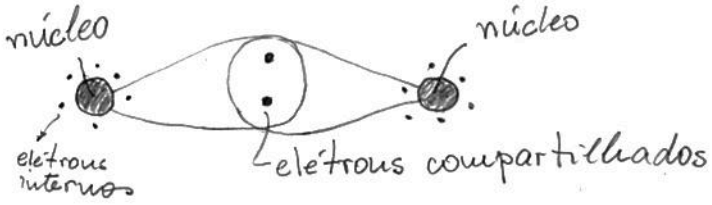
Átomo de um elemento metálico (na figura, o Na com 11 elétrons e 11 prótons).



O sólido metálico:

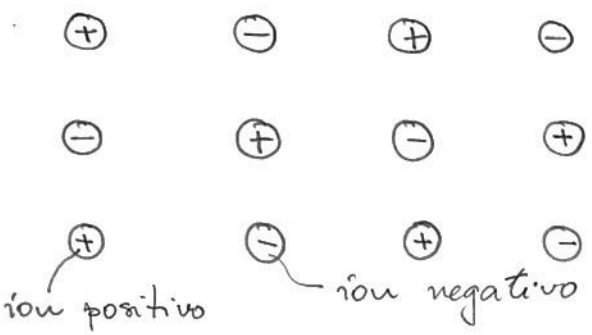


(2) LIGAÇÃO COVALENTE



Os elétrons da ligação não são livres para se mover e por isso o material é isolante.

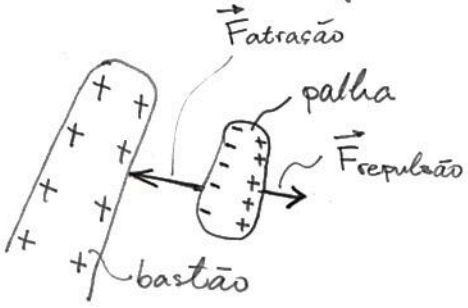
LIGAÇÃO IÔNICA



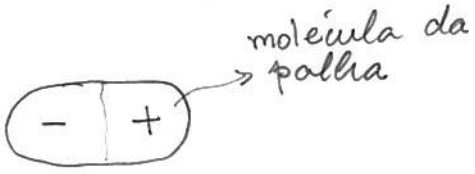
Neste tipo de ligação os elétrons passam de um átomo para o outro formando íons positivos e íons negativos. Não há elétrons livres e por isso o material é isolante.

POLARIZAÇÃO

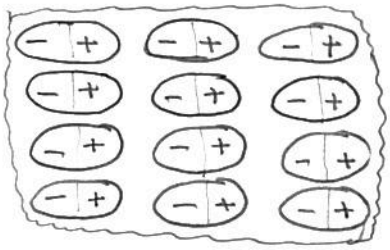
Por que um bastão carregado atrai objetos neutros?



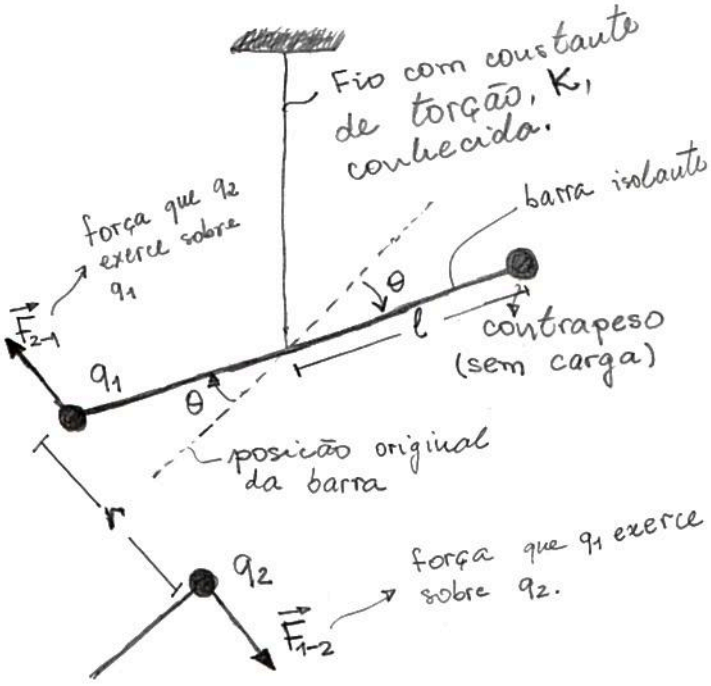
$F_{atração} > F_{repulsão}$



As moléculas da palha sofrem um processo chamado polarização. Os elétrons das moléculas são atraídos pelo bastão enquanto os núcleos (positivos) são repelidos. O efeito global na palha é uma separação de cargas, ficando as cargas − mais próximas do bastão do que as cargas +. Como consequência, a força de atração total é maior que a força de repulsão.



A LEI DE COULOMB



torque

$\tau = K.\theta$

Sabendo-se K e medindo-se θ pode-se obter o torque. Conhecendo-se o torque e o comprimento da barra pode-se calcular a força:

$F = \tau / l$

As medidas realizadas por C. A. Coulomb em 1784 revelaram que:

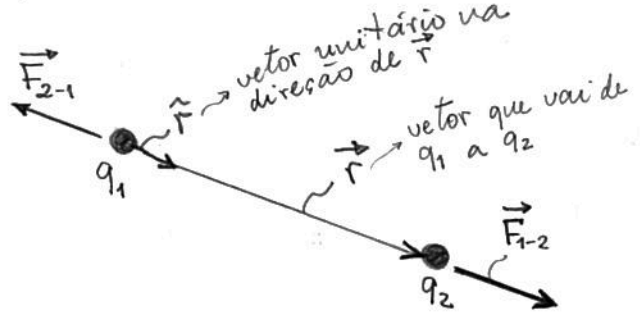
(1) $F_{1-2} \propto \frac{1}{r^2}$ (módulo)

(2) $F_{1-2} \propto |q_1 q_2|$

(3) $\vec{F}_{1-2}$ é ao longo da reta que passa por q_1 e q_2.

(4) A força é atrativa se as cargas tiverem sinais contrários e repulsiva se as cargas tiverem o mesmo sinal.

Estas quatro afirmações podem ser resumidas em uma equação vetorial.



$$\vec{F}_{1-2} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

O módulo de $\vec{F}_{1-2}$ é dado por

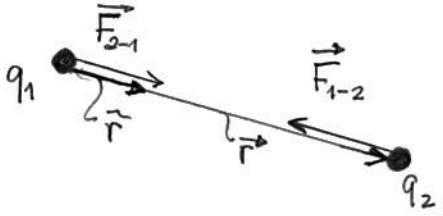
$$F_{1-2} = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2}$$

Note que as afirmações (1), (2) e (3) são automaticamente satisfeitas.

Para verificar a afirmação (4) note que:

se q_1 e q_2 tiverem o mesmo sinal, $q_1 q_2 > 0$. Portanto $\vec{F}_{1-2}$ tem o mesmo sentido de $\hat{r}$ e assim a força é repulsiva (como na figura acima)

Se q_1 e q_2 tiverem sinais contrários, $q_1 q_2 < 0$. Portanto $\vec{F}_{1-2}$ é contrária a $\hat{r}$, de forma que a força é atrativa (figura abaixo).



Outro resultado obtido experimentalmente é que

$$\vec{F}_{1-2} = -\vec{F}_{2-1}$$

"A força elétrica obedece a 3ª lei de Newton."

A constante de proporcionalidade k é medida experimentalmente.

UNIDADES NO SI (sistema internacional de unidades)

(1) Corrente. Define-se a corrente elétrica que atravessa uma superfície como

$$i = \frac{dQ}{dt}$$

i: corrente; dQ: carga; dt: tempo

A unidade de corrente no SI é o ampère (A) que será definido no capítulo 29.

(2) Carga. A unidade de carga no SI é o coulomb (C), definido como

$$C = A \cdot s$$

CARGA ELEMENTAR

A carga do próton é (com 3 algarismos)

$$e = 1{,}60 \times 10^{-19}\ C$$

Isto quer dizer que 1C equivale a

$$\frac{1}{1{,}60 \times 10^{-19}} = 6{,}25 \times 10^{18}$$

prótons.

A carga do elétron é

$$-e = -1{,}60 \times 10^{-19} C$$

A constante k pode ser medida experimentalmente e vale (com 3 algarismos)

$$k = 8{,}99 \times 10^{9}\ N \cdot m^2/C^2$$

É comum escrever

$$k = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0}$$

ε_0: constante de permissividade do vácuo.

de forma que

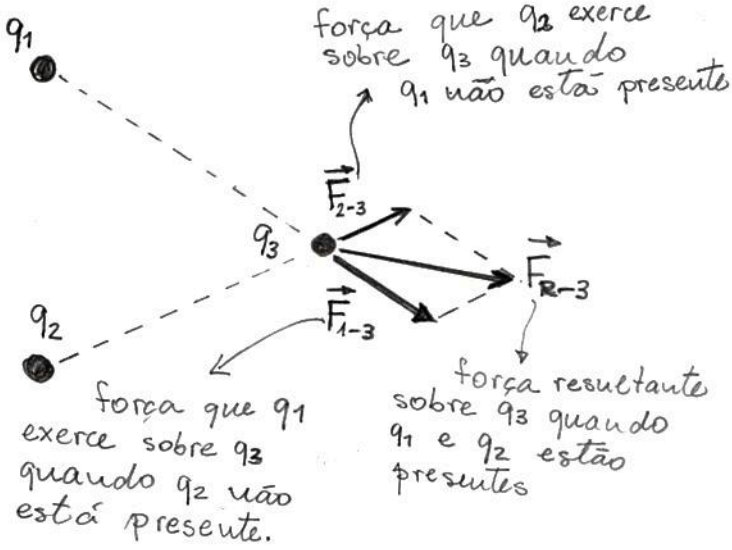
$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Em termos de ε_0, escrevemos

$$\vec{F}_{1-2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

Lei de Coulomb

PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO



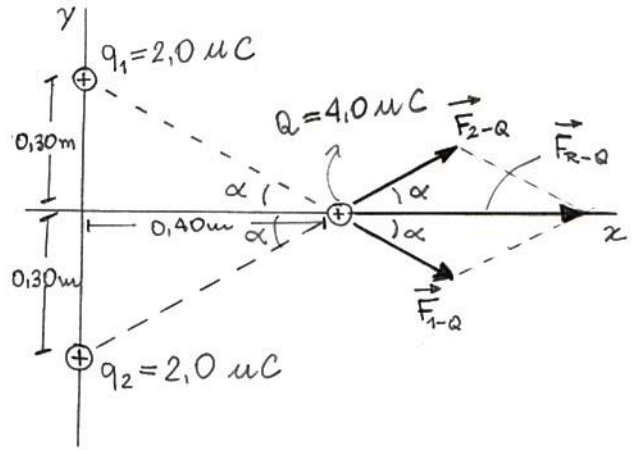
A experiência mostra que

$$\vec{F}_{R-3} = \vec{F}_{1-3} + \vec{F}_{2-3}$$

soma vetorial

Este resultado é chamado princípio da superposição e pode ser extendido para situações onde há um número maior de cargas.

Ex 21.4



Obter a força resultante sobre Q.
Sol. Em módulo

$$F_{1-Q} = k\frac{q_1 Q}{r^2}$$

onde

$$r = \sqrt{(0{,}30\,m)^2 + (0{,}40\,m)^2} = 0{,}50\,m$$

Assim

$$F_{1-Q} = 9{,}0\times10^{9}\,\frac{N.m^2}{C^2} \times \frac{2{,}0\times10^{-6}C \times 4{,}0\times10^{-6}C}{(0{,}50\,m)^2}$$

$$= 0{,}29\,N$$

Como $q_1 = q_2$ e a distância é a mesma,

$$F_{2-Q} = F_{1-Q} \quad \text{(em módulo)}$$

Os vetores-força são dados por

$$\vec{F}_{1-Q} = 0{,}29N\cos\alpha\,\hat{i} - 0{,}29N\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{j}$$

$$\vec{F}_{2-Q} = 0{,}29N\cos\alpha\,\hat{i} + 0{,}29N\,\text{sen}\,\alpha\,\hat{j}$$

onde

$$\cos\alpha = \frac{0{,}40m}{0{,}50m} = 0{,}80$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{0{,}30m}{0{,}50m} = 0{,}60$$

Fazendo as contas, obtemos

$$\vec{F}_{1-Q} = 0{,}23N\,\hat{i} - 0{,}17N\,\hat{j}$$
$$\vec{F}_{2-Q} = 0{,}23N\,\hat{i} + 0{,}17N\,\hat{j}$$

A força resultante sobre Q é dada por

$$\vec{F}_{R-Q} = \vec{F}_{1-Q} + \vec{F}_{2-Q} = 0{,}46N\,\hat{i}$$

AÇÃO À DISTÂNCIA

A interpretação que apresentamos para a força elétrica baseia-se na idéia de ação à distância.



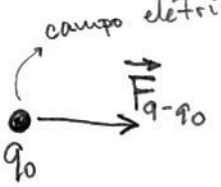
De acordo com este ponto de vista, q exerce uma força $\vec{F}_{q-q_0}$ sobre q_0 sem necessidade de um agente intermediário para informar q_0 que ela deve sentir a força.

CAMPO ELÉTRICO

De acordo com uma outra interpretação, a carga q cria um "campo elétrico" em todos os pontos na sua vizinhança.



Por sua vez o campo elétrico gerado por q exerce uma força sobre q_0.



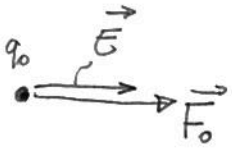
O campo elétrico faz o papel de agente intermediário.

No caso de cargas elétricas em repouso as duas interpretações são equivalentes mas no caso de cargas em movimento somente a segunda interpretação pode explicar os resultados experimentais. Isto ficará mais claro quando estudarmos cargas em movimento mais adiante.

DEFINIÇÃO DE CAMPO ELÉTRICO

Suponha que uma carga q_0 seja colocada em um ponto do espaço. Se q_0 "sentir" uma força $\vec{F}_0$ então dizemos que há um campo elétrico naquele ponto, dado por

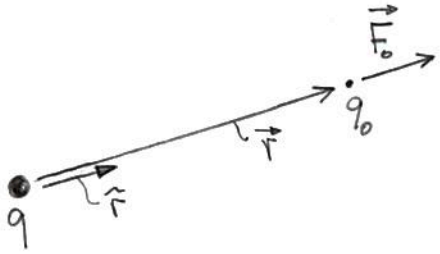
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$$



q_0 é chamada carga de prova.

CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA PONTUAL

Queremos determinar o campo elétrico no ponto definido pelo vetor $\vec{r}$. Para isto vamos imaginar uma carga de prova, q_0, neste ponto.



Da lei de Coulomb, sabemos que a força sobre q_0 é

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\hat{r}$$

Assim, o campo elétrico é dado por

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

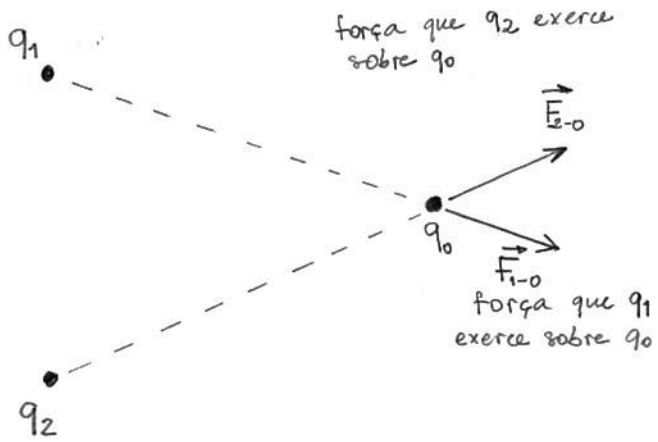
Note que:

(1) $\vec{E}$ não depende da carga de prova q_0. Ela é simplesmente uma carga fictícia.

(2) $\vec{E}$ depende do ponto onde o estamos calculando:

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \quad \text{ou} \quad \vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$$

PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO



Do princípio da superposição para a força elétrica, temos

$$\vec{F}_{R-0} = \vec{F}_{1-0} + \vec{F}_{2-0}$$

Da definição de campo elétrico,

$$\vec{F}_{1-0} = q_0 \vec{E}_1 \qquad \vec{F}_{2-0} = q_0 \vec{E}_2$$

$\vec{E}_1$: campo elétrico produzido por q_1 no ponto onde está q_0

$\vec{E}_2$: campo elétrico produzido por q_2 onde está q_0

Portanto, podemos escrever

$$\vec{F}_{R-0} = q_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

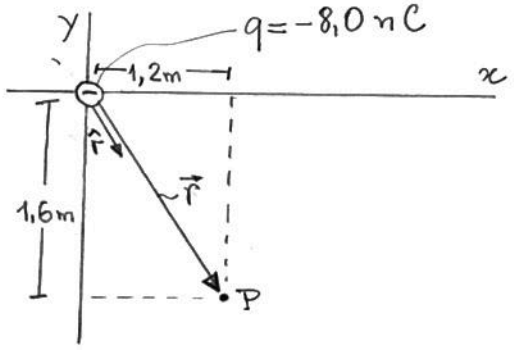
de forma que o campo elétrico resultante é

$$\vec{E}_R = \frac{\vec{F}_{R-q_0}}{q_0} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Conclusão: há um princípio da superposição também para o campo elétrico.

Obviamente a idéia pode ser extendida para qualquer número de cargas.

Ex. 21.6



Obter uma expressão para o vetor campo elétrico no ponto P.

Sol.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{r} = 1{,}2\,\text{m}\,\hat{i} - 1{,}6\,\text{m}\,\hat{j}$$

$$r = \sqrt{(1{,}2\,\text{m})^2 + (-1{,}6\,\text{m})^2} = 2{,}0\,\text{m}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{1{,}2\,\text{m}\,\hat{i} - 1{,}6\,\text{m}\,\hat{j}}{2{,}0\,\text{m}} = 0{,}6\,\hat{i} - 0{,}8\,\hat{j}$$

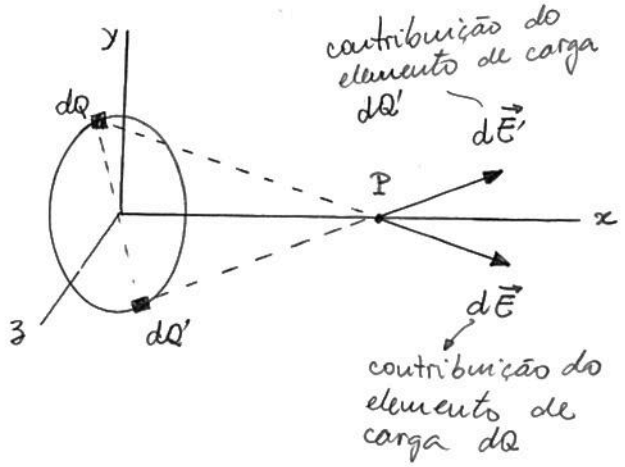
Portanto,

$$\vec{E} = 9{,}0\times10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{(-8{,}0\times10^{-6}\,\text{C})}{(2{,}0\,\text{m})^2} \times (0{,}6\,\hat{i} - 0{,}8\hat{j})$$

$$\vec{E} = -11 \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\hat{i} + 14 \frac{\text{N}}{\text{C}}\,\hat{j}$$

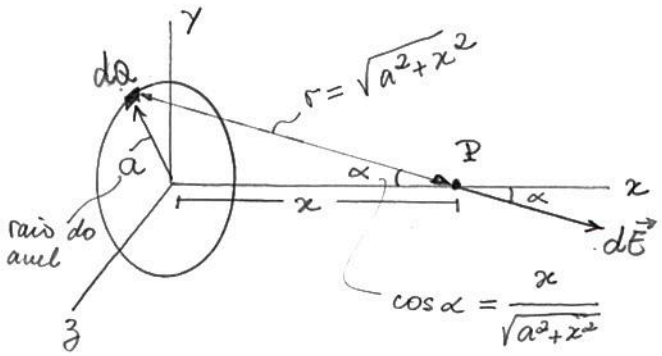
Ex. 21.10 Anel carregado com carga Q. Determinar o vetor campo elétrico em um ponto sobre o eixo do anel.

Sol. (1) Argumento de simetria.



Note que $d\vec{E} + d\vec{E}'$ só tem componente x. Então só precisamos calcular a componente x de $\vec{E}$.

(2) Cálculo de E_x.



O módulo do campo devido ao elemento de carga dQ é

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{dQ}{(x^2+a^2)}$$

A componente x de $d\vec{E}$ é

$$dE_x = dE\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{dQ}{(x^2+a^2)}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Integrando dE_x podemos obter E_x. Assim

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int dQ$$

↳ a integral é sobre todo o anel dá Q (carga total)

$$E_x = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Em notação vetorial,

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\hat{i}$$

Obs. Não podemos integrar dE (módulo de $d\vec{E}$). Deve-se integrar as componentes dE_x, dE_y e dE_z separadamente. Neste caso, $\int dE_y = \int dE_z = 0$, por simetria.

Caso especial: $x \gg a$.

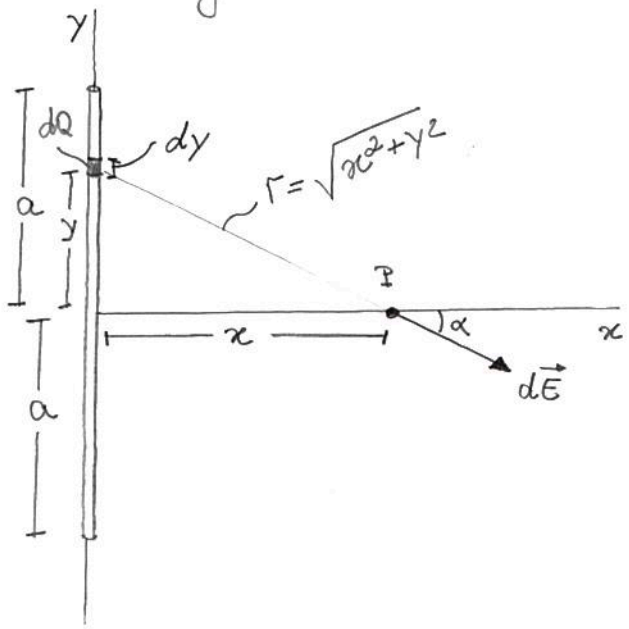
Fazendo $x \gg a$, obtemos

$$\vec{E} \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\,\hat{i}$$



Visto de muito longe, o anel se comporta como uma carga pontual.

Ex. 21-11 Linha de comprimento 2a carregada com uma carga Q.



Por um argumento de simetria similar ao do exemplo anterior, vemos que o campo resultante só possui componente x.

Em módulo,

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{dQ}{x^2+y^2}$$

A componente x de $d\vec{E}$ é dada por

$$dE_x = dE\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{dQ}{x^2+y^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

A carga dQ pode ser expressa em termos de dy por meio de uma regra de três

$$\left.\begin{array}{l} dQ \text{ — } dy \\ Q \text{ — } 2a \end{array}\right\} \Rightarrow dQ = \frac{Q}{2a}dy$$

Portanto,

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{2a}\cdot\frac{x\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Integrando

$$E_x = \frac{x}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Para calcular a integral, vamos fazer

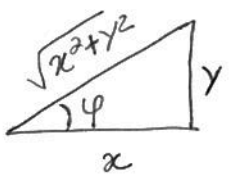
$$y = x\,tg\varphi \Rightarrow dy = x\sec^2\varphi\,d\varphi$$

$$\int\frac{dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \int\frac{x\sec^2\varphi\,d\varphi}{[x^2\underbrace{(1+tg^2\varphi)}_{\sec^2\varphi}]^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{x^2}\int\cos\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{x^2}\,sen\varphi$$

Para expressar a integral em termos de y usamos o triângulo abaixo:



$\rightarrow tg\varphi = \frac{y}{x}$ ← da definição de φ

$$sen\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Portanto,

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 x}\cdot\frac{Q}{2a}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Bigg|_{-a}^{a}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2+a^2}}$$

Na forma vetorial,

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,\hat{i}$$

A densidade linear de carga é definida como

$$\lambda = \frac{Q}{2a}\begin{array}{l}\leftarrow \text{carga total}\\ \leftarrow \text{comprimento da barra}\end{array}$$

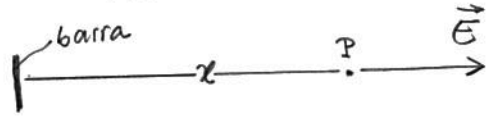
Em termos de λ,

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{a}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,\hat{i}$$

CASOS ESPECIAIS:

(1) $x \gg a$.

$$\vec{E} \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\,\hat{i}$$



Se o ponto P estiver muito longe da barra ela se comporta como uma carga pontual.

(2) $x \ll a$.

$$\sqrt{x^2+a^2} \simeq a$$

de forma que

$$\vec{E} \simeq \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x}\,\hat{i}$$

Este resultado é conhecido como "campo elétrico de uma linha infinita com densidade de carga λ.

Obs.: Nós poderíamos calcular E_y explicitamente (sem usar argumentos de simetria para afirmar que $E_y=0$). Assim, teríamos

$$dE_y = -dE\,\text{sen}\,\alpha$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{dQ}{x^2+y^2}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

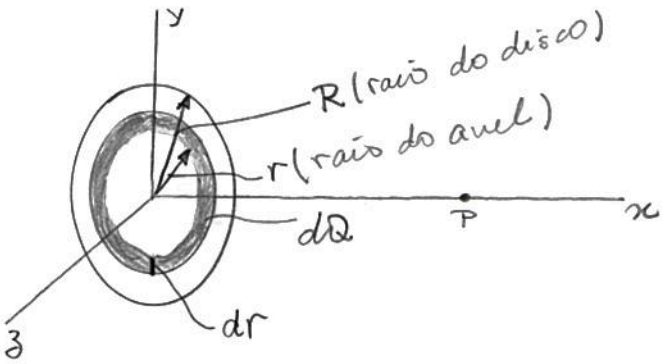
$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{2a}\cdot\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{2a}\underbrace{\int_{-a}^{a}\frac{y\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}}_{=0}$$

toda integral de função ímpar em intervalo simétrico dá zero. Note que o integrando é uma função ímpar de y [$f(y) = -f(-y)$].

Ex. 21.12 Disco de raio R carregado com carga Q. Determinar $\vec{E}$ em um ponto sobre o eixo do disco.

Sol. Vamos dividir o disco em anéis.



A contribuição do anel de raio r e largura dr é dada por

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{x\,dQ}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

(dQ: carga do anel; r: raio do anel)

Como o campo do anel só possui componente x, o campo do disco também possui somente componente x.

A carga infinitesimal do anel pode ser expressa em termos de r e dr como

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi r\,dr \;\text{—}\; dQ \\ \pi R^2 \;\text{—}\; Q \end{array}\right\} \Rightarrow dQ = \frac{2Qr}{R^2}\,dr$$

($2\pi r\,dr$: área do anel; πR^2: área do disco)

Assim

$$dE_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^2}\cdot\frac{2r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

Para obter o campo elétrico do disco devemos somar as contribuições de todos os anéis, ou seja, integrar em r. Assim

$$E_x = \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^2}\int_0^R \frac{2r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-Qx}{4\pi\epsilon_0 R^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2+r^2}}\Bigg|_0^R$$

$$E_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(\frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) \quad (A)$$

Supondo $x>0$, como na figura, $x/|x| = 1$. Assim

$$E_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) \quad (B)$$

Definindo a densidade superficial de carga como

$$\sigma = \frac{Q \rightarrow \text{carga total}}{\pi R^2 \rightarrow \text{área do anel}}$$

podemos escrever (para $x>0$)

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

CASOS ESPECIAIS.

(1) $x >> R$. Para calcular o limite devemos fazer a expansão do 2º termo entre parênteses.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{R^2}{x^2}}} = \left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2}$$

Da expansão

$$(1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u + \cdots$$

(como $R \ll x$, $u \ll 1$.)

com $u = R^2/x^2$, temos

$$\left(1+\frac{R^2}{x^2}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{R^2}{2x^2} + \cdots$$

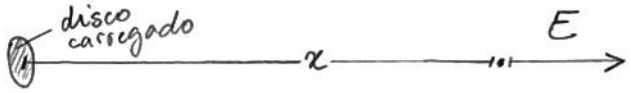
substituindo este resultado na expressão de E_x, temos

$$E_x \simeq \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\cdot\frac{R^2}{2x^2} = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

Lembrando que $Q = \sigma\pi R^2$,

$$E_x \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}$$

De novo, se o disco é observado de muito longe, ele se comporta como uma carga pontual.



(2) $R >> x$.

Neste caso $\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \rightarrow 0$, e

$$E_x \simeq \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$ → note que o resultado não depende de x.

Este resultado é conhecido como campo elétrico de um disco infinito com densidade de carga σ.

Se quisermos considerar $x<0$ em nossa análise devemos partir da Eq. (A) em vez da

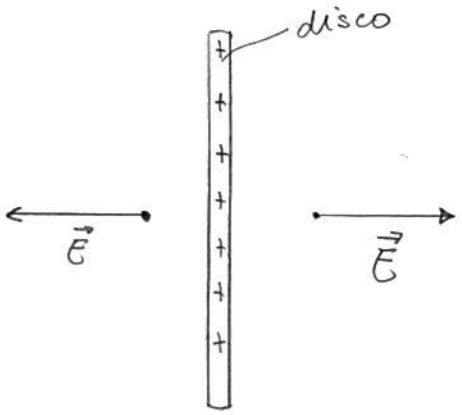
Eq. (B). Assim, para $R \gg x$, obtemos

$$E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{x}{|x|}$$

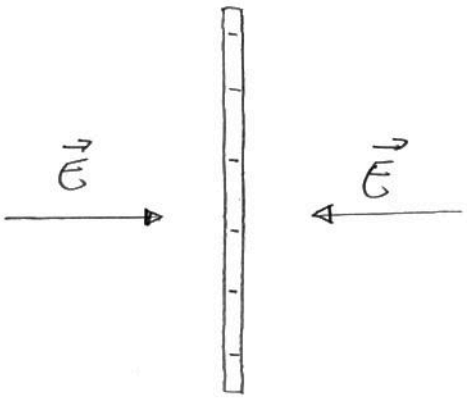
ou

$$E_x = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Se $\sigma > 0$ (carga positiva), $\vec{E}$ aponta afastando do disco, tanto para $x > 0$ quanto para $x < 0$.

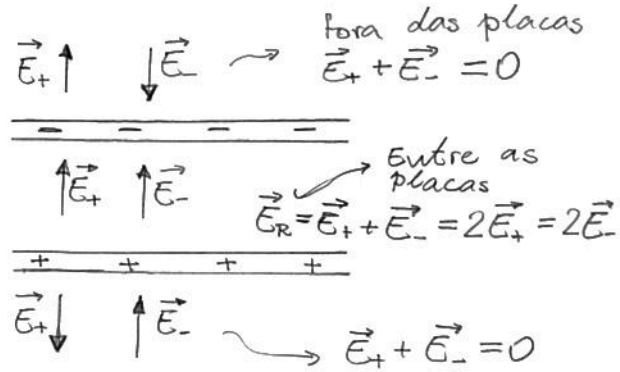


Se $\sigma < 0$ (carga negativa), $\vec{E}$ aponta no sentido do disco



Ex. 21-13 Campo elétrico de duas placas infinitas com cargas opostas.

Sol. Podemos usar o resultado do exemplo anterior e somar as contribuições das placas negativa e positiva.



Entre as placas, o campo elétrico resultante aponta para a placa negativa e tem módulo

$$E_R = 2 \times \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Fora das placas, $\vec{E}_R = 0$.

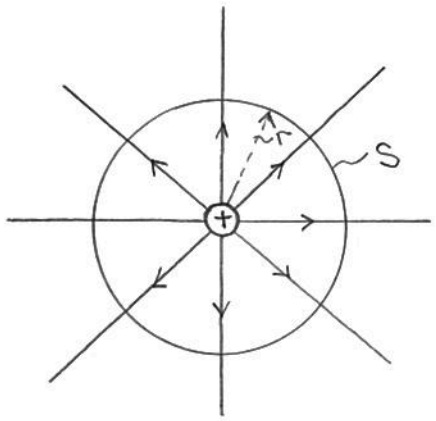
LINHAS DE FORÇA (ou linhas do campo elétrico)

São representações visuais do campo elétrico e traçadas de acordo com as seguintes regras:

(1) Em cada ponto o campo elétrico tem que ser tangente à linha de campo. A linha deve conter uma seta indicando o sentido do campo.

(2) $\frac{\text{número de linhas}}{\text{área}} \propto$ módulo do campo elétrico

LINHAS DE CAMPO ELÉTRICO PARA UMA CARGA PONTUAL POSITIVA



Note que:

(1) As linhas são retas radiais apontando para fora porque em qualquer ponto o campo elétrico aponta afastando da carga.

(2) Próximo da carga as linhas são mais próximas porque o campo elétrico é mais intenso; longe da carga as linhas são mais afastadas porque o campo é mais fraco.

Considere uma superfície esférica de raio r centrada na carga. De acordo com a regra (2)

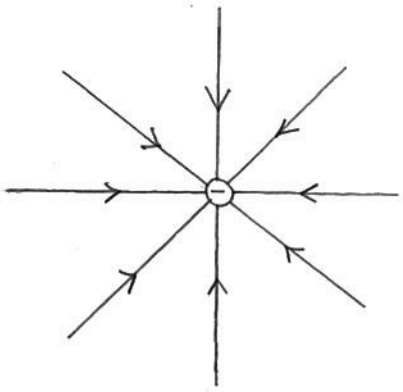
$$E \propto \frac{\text{número de linhas}}{4\pi r^2}$$

ou simplesmente

$$E \propto \frac{1}{r^2} \rightsquigarrow$$ de acordo com a lei de Coulomb

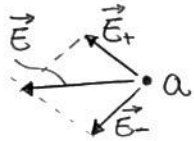
CARGA PONTUAL NEGATIVA

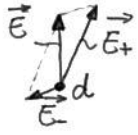
A única coisa que muda é que as setas apontam para a carga.

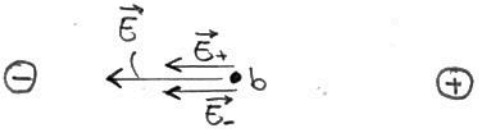


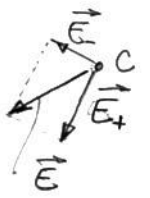
DUAS CARGAS DE MESMO MÓDULO E SINAIS OPOSTOS

Em cada ponto devemos somar os campos das cargas + e −. A fig abaixo mostra como isto é feito em quatro pontos: a, b, c, d.

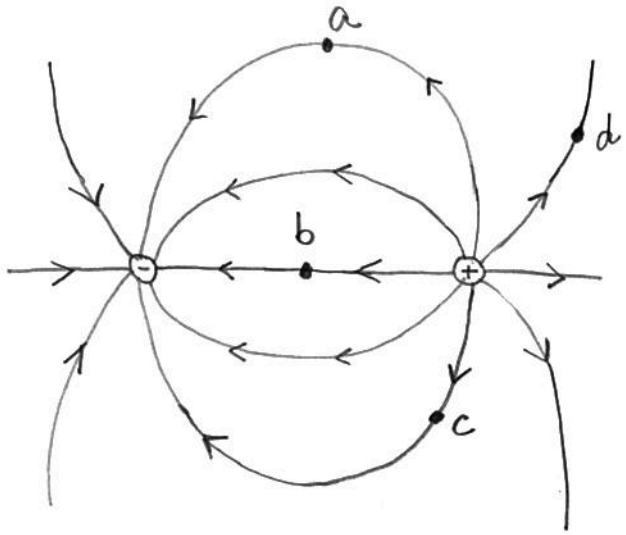








Somando $\vec{E}_+ + \vec{E}_-$ em todos os pontos pode-se construir as linhas de campo elétrico. Na prática basta fazer isto para alguns pontos para se ter uma idéia qualitativa a respeito das linhas. Veja fig. abaixo.



* Veja duas cargas positivas no livro

DIPOLO ELÉTRICO

Um dipolo elétrico é um par de cargas pontiformes com mesmo módulo e sinais opostos.



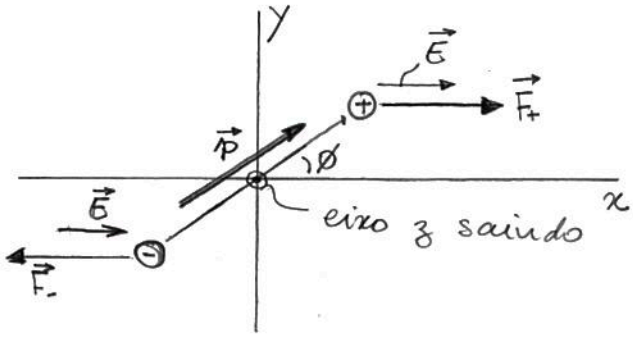
O momento de dipolo é um vetor com:

módulo: $p = q\,d$

direção: ao longo da reta que passa pelas cargas

sentido: da carga − para a carga +.

DIPOLO EM UM CAMPO ELÉTRICO UNIFORME



FORÇA RESULTANTE

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q\vec{E} + (-q)\vec{E} = 0$$

$\vec{F}$: força resultante sobre o dipolo; $\vec{F}_+$: força sobre $+q$; $\vec{F}_-$: força sobre $-q$.

TORQUE SOBRE O DIPOLO

Tomando a origem como ponto de referência, temos

$$\vec{\tau}_+ = -F_+ \frac{d}{2} \operatorname{sen}\phi\, \hat{k}$$

(F_+: módulo de $\vec{F}_+$; use a regra da mão direita para ver que o torque aponta para dentro da página; $\vec{\tau}_+$: torque sobre $+q$.)

$$\vec{\tau}_- = -F_- \frac{d}{2} \operatorname{sen}\phi\, \hat{k}$$

como $F_+ = F_- = qE$,

$$\vec{\tau}_+ = \vec{\tau}_- = -qE\frac{d}{2}\operatorname{sen}\phi\, \hat{k}$$

O torque resultante sobre o dipolo é

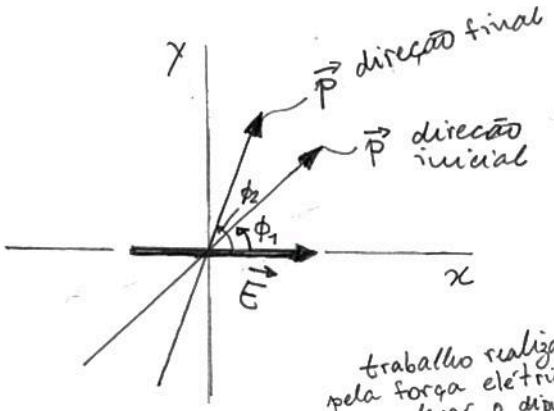
$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_- = -qE\,d\,\mathrm{sen}\phi\,\hat{k}$$

ou $\vec{\tau} = -pE\,\mathrm{sen}\phi\,\hat{k}$

Esta equação pode ser escrita na forma vetorial

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

ENERGIA POTENCIAL DO DIPOLO NA PRESENÇA DO CAMPO



$U(\phi_2) - U(\phi_1) = -W_{12}$ ← trabalho realizado pela força elétrica para levar o dipolo da direção inicial para a final

$$= -\int_{\phi_1}^{\phi_2} \tau\, d\phi$$

$$= -\int_{\phi_1}^{\phi_2} -pE\,\mathrm{sen}\phi\, d\phi$$ ← note que $\vec{\tau}$ é contrário a $d\vec{\phi}$

$$= -pE\cos\phi \Big|_{\phi_1}^{\phi_2}$$

$$= -pE\cos\phi_2 + pE\cos\phi_1$$

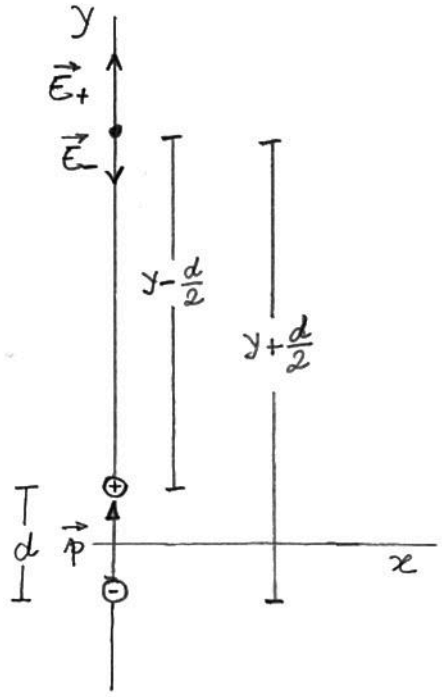
Escolhendo $\phi_1 = \pi/2$ como sendo o ângulo para o qual $U = 0$ e fazendo $\phi_2 \equiv \phi$, temos

$$U(\phi) = -pE\cos\phi = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

Obs. A escolha do ângulo para o qual $U = 0$ é arbitrária mas é comum escolher $\phi_1 = \pi/2$.

CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR UM DIPOLO.

Vamos calcular $\vec{E}$ em um ponto do eixo do dipolo supondo $y \gg d$.



$$E_y = E_{+y} + E_{-y}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{\left(y-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(y+\frac{d}{2}\right)^2}\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{d}{2y}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{d}{2y}\right)^2}\right\}$$

Usando a expansão

$$(1+u)^{-2} \simeq 1 - 2u$$

com $u = -d/2y$, temos

$$\left(1-\frac{d}{2y}\right)^{-2} \simeq 1+\frac{d}{y}$$

se $u = +\frac{d}{2y}$, temos

$$\left(1+\frac{d}{2y}\right)^{-2} \simeq 1-\frac{d}{y}$$

Portanto

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2} \cdot \frac{2d}{y} = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0 y^3}$$

Como $p = qd$, podemos escrever

$$E_y = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 y^3}$$

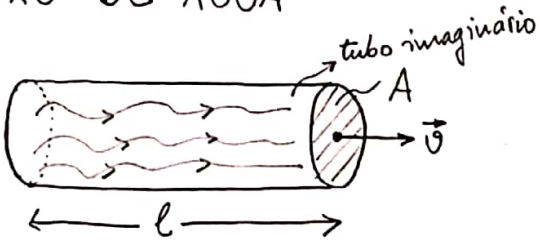
PROBLEMAS SUGERIDOS

VELHO: 3, 17, 22, 31, 44, 45, 49, 50, 52, 53, 54, 60, 68, 69, 72, 75, 76, 77, 78, 83, 84

NOVO: 3, 23, 32, 43, 60, 61, 64, 66, 72, 73, 74, 80, 89, 90, 93, 95, 96, 97, 98, 103, 104

2. LEI DE GAUSS

FLUXO DE ÁGUA



O volume de água dentro do tubo imaginário da fig. acima é

$$\Delta V = A\ell$$

Se a água possuir uma velocidade v e demorar um tempo Δt para atravessar o tubo, então

$$\ell = v\Delta t$$

de forma que

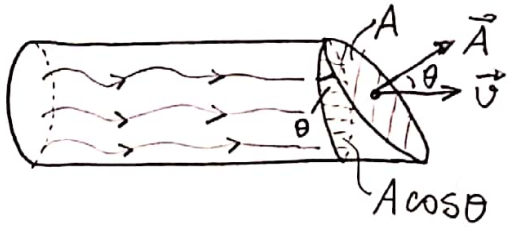
$$\Delta V = vA\Delta t$$

O fluxo de água, definido como o volume de água que atravessa a área A por unidade de tempo, é dado por

$$\Phi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = vA$$

Se a área for inclinada em relação ao vetor velocidade, como na figura abaixo, devemos trocar a área A pela sua projeção no plano perpendicular a $\vec{v}$, de forma que

$$\Phi = v \cdot A\cos\theta$$



Definimos o vetor $\vec{A}$ como um vetor de:

(1) módulo A;

(2) direção perpendicular ao plano da área;

(3) sentido de dentro para fora do tubo

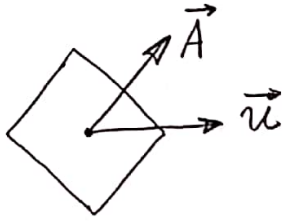
Assim o fluxo pode ser escrito como

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

GENERALIZAÇÃO

O fluxo de um campo vetorial $\vec{u}$ através uma superfície plana de área A é definido como

$$\Phi_u = \vec{u} \cdot \vec{A}$$



Esta definição é válida mesmo que nenhuma matéria (como a água) esteja atravessando a área.

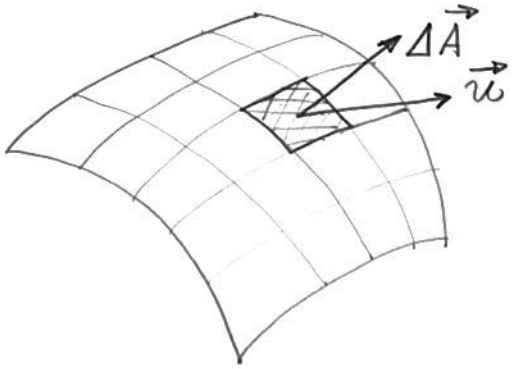
Digitalizado com CamScanner

SUPERFÍCIE CURVA

se a superfície não for plana podemos dividi-la em pequenos elementos de área (aproximadamente planos). Assim

$$\Phi \simeq \sum \vec{u} \cdot \Delta \vec{A}$$

↳ soma sobre todos os elementos de área



Aumentando cada vez mais o número de elementos e fazendo o tamanho deles cada vez menor, temos

$$\Phi = \lim_{\Delta A \to 0} \sum \vec{u} \cdot \Delta \vec{A}$$

ou

$$\Phi = \int \vec{u} \cdot d\vec{A}$$

Esta integral é chamada integral de superfície. Note que o campo vetorial $\vec{u}$ pode variar de ponto para ponto sobre a superfície.

No caso da superfície sobre a qual estamos fazendo a integral ser uma superfície fechada usa-se a notação

$$\Phi = \oint \vec{u} \cdot d\vec{A}$$

Para superfície fechada adota-se a convenção de que $d\vec{A}$ aponta para fora da superfície. No caso de uma superfície aberta a escolha do sentido de $d\vec{A}$ é arbitrária. Neste capítulo só estaremos interessados no fluxo do vetor campo elétrico através de superfícies fechadas.

FLUXO DO CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA PONTUAL

O fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada é dado por

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

Como o número de linhas de força do campo elétrico é proporcional a E, o fluxo é proporcional ao número total de linhas que atravessa a superfície.

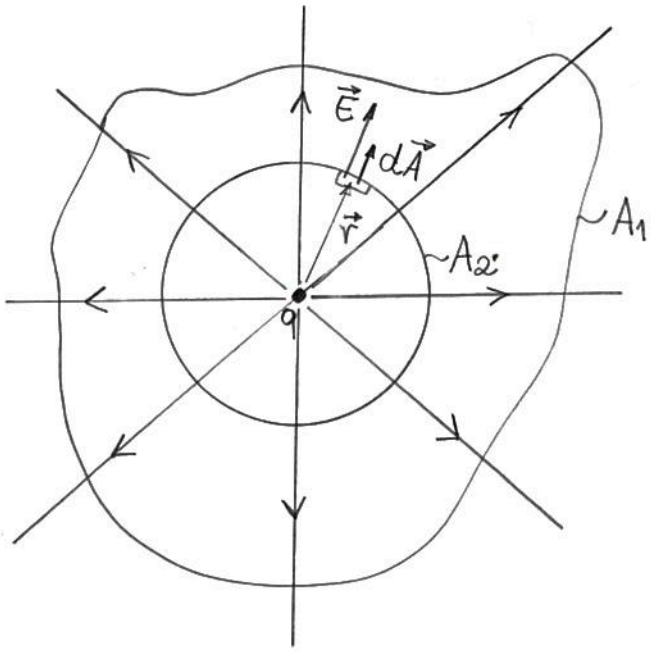
A unidade do fluxo de $\vec{E}$ no SI é o $N \cdot m^2/C$.

Considere em seguida o fluxo do campo elétrico de uma carga pontual q através de uma superfície A_1 que contém a carga em seu interior.

Como todas as linhas de força que atravessam A_1

também atravessam a superfície esférica A_2, então

fluxo de $\vec{E}$ através de A_1. $\Phi_{E,A1} = \Phi_{E,A2}$



Na superfície esférica (de raio R) temos

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\hat{r}$$

Como $\vec{E}$ e $d\vec{A}$ apontam na mesma direção e no mesmo sentido

$$\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA$$

de forma que

$$\vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\,dA$$

O fluxo é dado por

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}\oint dA$$

note que R é cte, embora $\vec{r}$ não seja.

Como

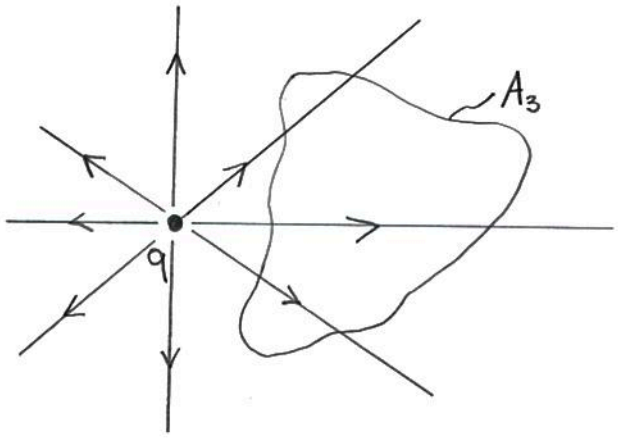
$$\oint dA = 4\pi R^2 \leftarrow \text{área total da esfera}$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Note que o resultado acima não depende do raio da esfera. Mais que isso, não depende sequer da forma da superfície, desde que ela seja fechada e englobe a carga em seu interior.

Suponha agora que a carga esteja no exterior da superfície. Todas as linhas que entram na superfície por um lado saem pelo outro, de forma que

$$\Phi_{E,A3} = 0$$

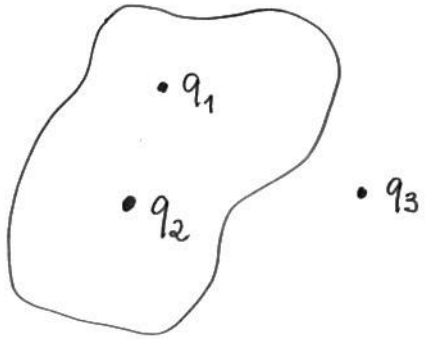


A LEI DE GAUSS

Considere agora 3 cargas: 2 dentro e uma fora de uma superfície fechada A. O campo elétrico resultante em qualquer ponto do espaço é dado por

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

$\vec{E}_1$: campo devido a q_1. $\vec{E}_2$: campo devido a q_2. $\vec{E}_3$: campo devido a q_3.



$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{A} = \frac{q_1}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E}_2 \cdot d\vec{A} = \frac{q_2}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E}_3 \cdot d\vec{A} = 0 \rightarrow$$ a carga está fora da superfície

Somando as três integrais temos

$$\oint (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3) \cdot d\vec{A} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

ou

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0}$$

Este resultado pode ser generalizado para qualquer número de cargas. Escrevemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

onde Q_{in} é a soma de todas as cargas que estão no interior da superfície; as cargas situadas no exterior não são incluídas em Q_{in}.

A expressão acima é conhecida como Lei de Gauss e a superfície na qual a integral é realizada é chamada superfície gaussiana.

Na eletrostática a lei de Gauss é equivalente à lei de Coulomb. Para demonstrar a lei de Gauss utilizamos a lei de Coulomb. Pode-se também fazer o contrário: demonstrar a lei de Coulomb a partir da lei de Gauss.

A lei de Gauss nos permite simplificar o cálculo do campo elétrico nos casos em que a distribuição de carga apresenta uma simetria favorável. A seguir vamos mostrar alguns exemplos.

CAMPO DE UMA CARGA PONTUAL

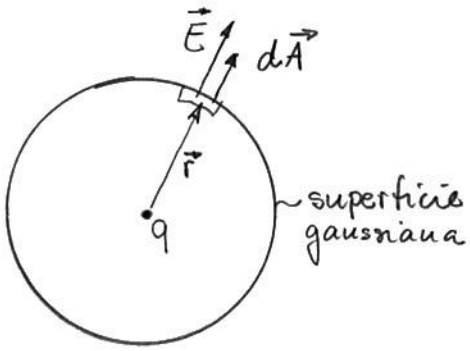
A primeira questão que surge no momento em que vamos calcular o campo elétrico usando a Lei de Gauss é que superfície gaussiana devemos usar. A resposta a esta questão depende da simetria da distribuição de carga. No caso de uma carga pontual devemos admitir que o campo elétrico é radial. Se a carga for positiva, o campo aponta para longe da carga. A escolha boa é uma superfície esférica que tem a carga no seu centro porque:

(1) em todos os pontos da superfície, $\vec{E}$ aponta na mesma direção e sentido que $d\vec{A}$, de forma que

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E\, dA;$$

(2) E (módulo) tem o mesmo valor em todos os pontos da superfície, de forma que

$$\oint E\, dA = E \oint dA = E 4\pi r^2$$



Como a carga total no interior da superfície é

$$Q_{in} = q$$

a Lei de Gauss toma a forma

$$E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

ou

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Se acrescentarmos a informação de que $\vec{E}$ é radial, temos a expressão vetorial

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

Se imaginarmos uma carga de prova Q no ponto $\vec{r}$, a força sobre Q será dada por

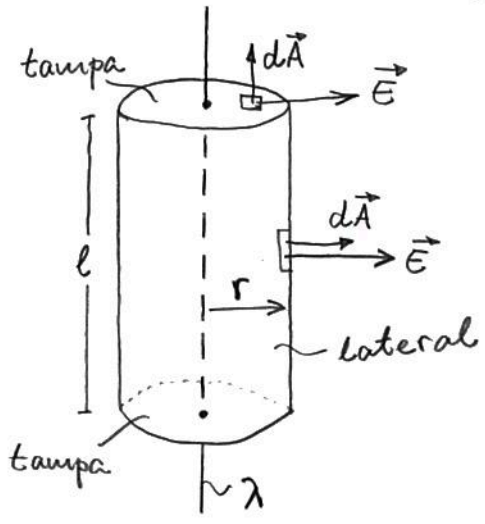
$$\vec{F}_{q-Q} = Q\vec{E} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\hat{r}$$

Acabamos de deduzir a Lei de Coulomb a partir da Lei de Gauss!

Você pode observar que nós usamos a Lei de Gauss apenas para calcular o módulo de $\vec{E}$; a direção e o sentido nós já sabíamos por argumentos de simetria. Esta situação aparecerá com muita freqüência, conforme você poderá notar nos exemplos que se seguem.

CAMPO DE UM FIO RETILÍNEO INFINITO CARREGADO (Ex. 23.6)

Vamos considerar agora um fio infinito, retilíneo, com uma densidade linear de carga λ.



Por simetria, $\vec{E}$ deve ser radial e se λ for positivo $\vec{E}$ deve apontar para longe do fio.

A superfície gaussiana conveniente é uma superfície cilíndrica que tem o fio em seu centro. Como ela tem que ser fechada, vamos incluir duas "tampas".

Nas tampas $\vec{E}$ é perpendicular a $d\vec{A}$, de forma que $\vec{E}\cdot d\vec{A}=0$. Assim

$$\int_{\text{tampas}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$$

Na face lateral $\vec{E}$ é paralelo a $d\vec{A}$, de forma que

$$\int_{\text{lateral}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{\text{lateral}} E\, dA$$

Também E (módulo) deve ter o mesmo valor sobre a superfície lateral, de forma que

$$\int_{\text{lateral}} E\, dA = E\int_{\text{lateral}} dA = E\,2\pi r\ell$$

onde r e ℓ são o raio e o comprimento do cilindro.

A carga total no interior da superfície gaussiana é

$$Q_{in} = \lambda\ell$$

de maneira que a lei de Gauss toma a forma

$$E\,2\pi r\ell = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}$$

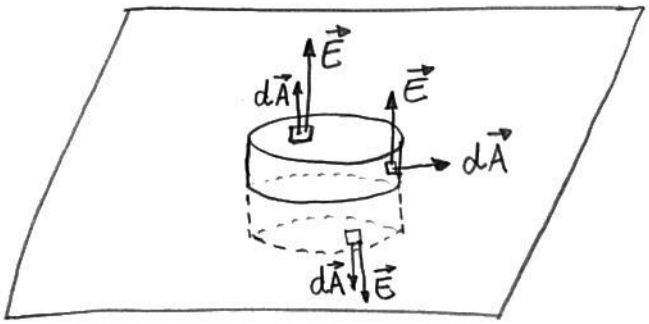
ou

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Este resultado foi obtido no capítulo passado por integração.

PLANO INFINITO UNIFORMEMENTE CARREGADO

Considere agora um plano infinito carregado com uma densidade de carga σ. Por simetria podemos ver que $\vec{E}$ é normal ao plano e se σ for positivo $\vec{E}$ aponta afastando do plano.



De novo, podemos escolher uma superfície gaussiana cilíndrica com duas tampas, uma de cada lado do plano. Vamos supor que a área das tampas seja A.

Na lateral da superfície gaussiana $\vec{E}$ é perpendicular a $d\vec{A}$, de forma que $\vec{E}\cdot d\vec{A}=0$.

Assim

$$\int_{lateral} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Nas tampas $\vec{E}$ aponta na mesma direção e sentido de $d\vec{A}$, de forma que

$$\int_{tampa} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{tampa} E\, dA$$

Como E (módulo) é constante sobre uma tampa

$$\int_{tampa} E\, dA = E \int_{tampa} dA = EA$$

Contando a lateral e as duas tampas temos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2EA$$

A carga total no interior da superfície gaussiana é

$$Q_{in} = \sigma A$$

de forma que a Lei de Gauss nos leva a

$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

ou

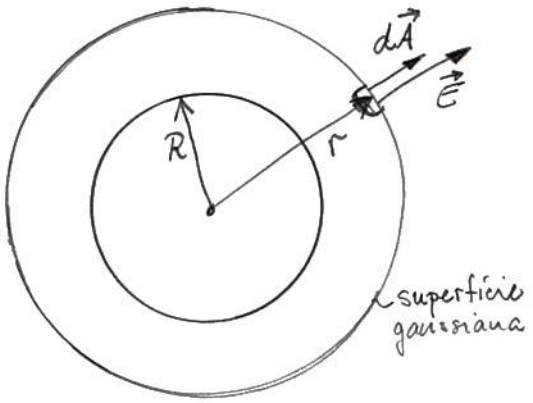
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

que é o mesmo resultado obtido no capítulo anterior.

ESFERA UNIFORMEMENTE CARREGADA (Ex. 23.9)

Aqui vamos determinar o campo elétrico de uma esfera de raio R carregada uniformemente com uma carga total Q.

Primeiro vamos considerar o caso em que $r > R$.



Neste caso a superfície gaussiana adequada é uma superfície esférica de raio r ($r > R$).

Pelos mesmos argumentos usados no caso da carga pontual, podemos escrever

$$\Phi_E = E\, 4\pi r^2$$

Como a carga total no interior da superfície gaussiana é

$$Q_{in} = Q$$

temos

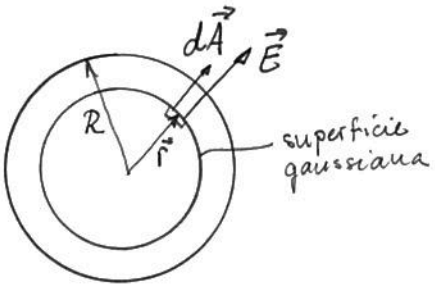
$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

ou

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad p/\ r > R.$$

Note que, fora da esfera carregada, a expressão do campo elétrico é igual à do campo de uma carga pontual.

Considere agora o caso em que $r < R$: a superfície gaussiana fica dentro da esfera.



De novo

$$\Phi_E = E\, 4\pi r^2$$

mas agora $Q_{in} \neq Q$. Só podemos incluir a carga que está dentro da superfície gaussiana.

A densidade volumétrica de carga é

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3}R^3}$$

(V: volume da esfera)

A carga no interior da esfera de raio r é

$$Q_{in} = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} r^3 = Q\frac{r^3}{R^3}$$

(você pode obter este resultado usando uma regra de três.)

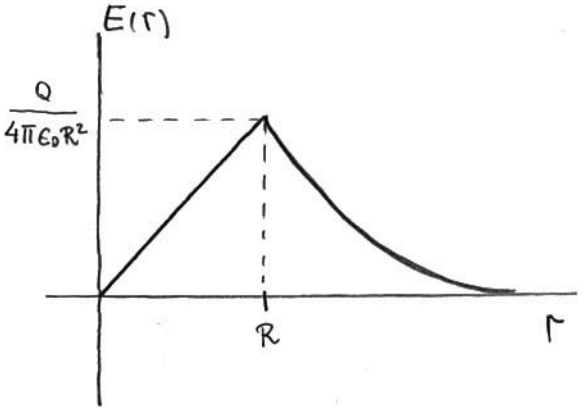
Substituindo estes resultados na Lei de Gauss obtemos

$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q r^3}{\epsilon_0 R^3}$$

ou

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

Gráfico de $E(r) \times r$:



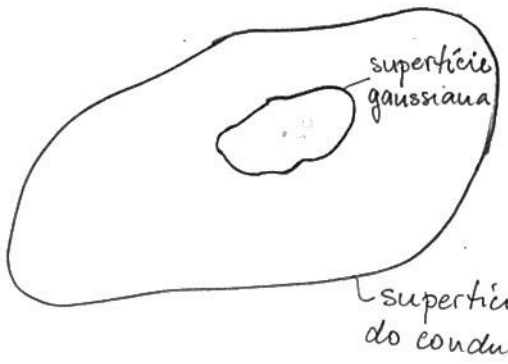
Note que as soluções obtidas para $r > R$ e $r < R$ levam ao mesmo resultado em $r = R$, ou seja, $E(r)$ é contínuo na superfície da esfera.

CONDUTORES

Um condutor é um material onde cargas elétricas em excesso podem mover-se livremente. Então, na situação de equilíbrio eletrostático, o campo elétrico deve anular-se em todos os pontos no interior do condutor. Se assim não fosse, as cargas se moveriam sob a ação do campo e não estaríamos em equilíbrio. Na verdade,

quando carregamos um condutor as cargas elétricas se distribuem para que o equilíbrio seja atingido e isto acontece em um tempo extremamente pequeno.

Uma consequência do fato de $\vec{E}$ ser nulo no interior de um condutor é que as cargas em excesso devem estar na sua superfície. Para mostrar isto considere uma superfície gaussiana de formato arbitrário no interior do condutor.



Aplicando a lei de Gauss a esta superfície, temos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

Como $\vec{E}=0$, a integral é nula. Dessa forma, concluímos que

$$Q_{in} = 0$$

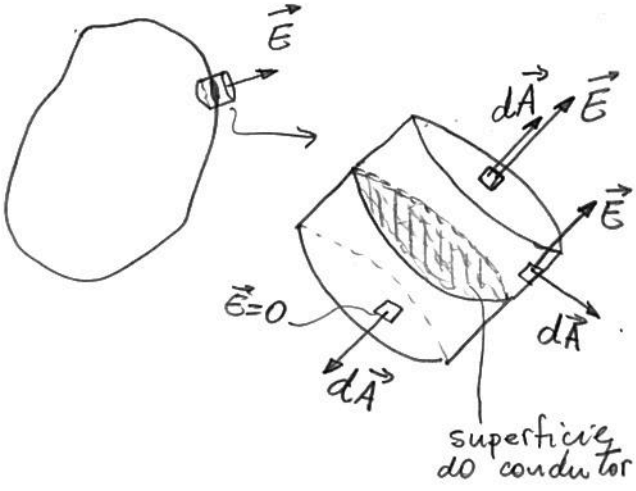
de forma que não há carga no interior da superfície gaussiana. Podemos repetir o raciocínio para todas as superfícies gaussianas possíveis que se situam no interior do condutor e concluir que não pode haver carga acumulada em nenhum ponto dentro do condutor. Logo qualquer carga em excesso deve estar na superfície do condutor.

CAMPO ELÉTRICO NA SUPERFÍCIE DE UM CONDUTOR

No próximo capítulo vamos mostrar que a componente do campo elétrico tangencial à superfície que separa dois meios é sempre contínua. Então, próximo da superfície de um condutor, a componente tangencial de $\vec{E}$ tem o mesmo valor dentro e fora do condutor. Como a componente tangencial é nula no interior do condutor, ela também é nula no exterior. Isto quer dizer que fora do condutor, e próximo da superfície, $\vec{E}$ é normal à superfície.

Em seguida vamos calcular o módulo do campo elétrico nas proximidades da sua superfície supondo que que a densidade de carga na superfície do condutor seja σ.

Considere uma superfície gaussiana na forma de uma caixinha cilíndrica.



Na parte da superfície gaussiana que está dentro do condutor, $\vec{E}=0$, de forma que

$$\int_{\text{dentro}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$$

Fora do condutor, na parte lateral, $\vec{E}$ é perpendicular a $d\vec{A}$, tal que

$$\int_{\text{fora, na lateral}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$$

Na tampa que está fora do condutor, $\vec{E}\cdot d\vec{A} = E\,dA$. Assim

$$\int_{\text{fora, na tampa}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\,dA$$

Supondo que a área da tampa seja pequena, E é cte ao longo da tampa, de forma que

$$\int_{\text{fora, na tampa}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\int_{\text{fora, na tampa}} dA = EA$$

onde A é área da tampa. Somando as contribuições de todas as superfícies, temos

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = EA$$

A carga no interior da superfície gaussiana é

$$Q_{in} = \sigma A$$

Substituindo estes resultados na lei de Gauss chegamos a

$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

A menos que o condutor seja esférico, σ não é constante. Nos próximo capítulo vamos mostrar que σ é maior nas regiões mais pontudas.

Problemas sugeridos:

VELHO: 8, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 24, 25, 26, 33, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 45, 49, 50

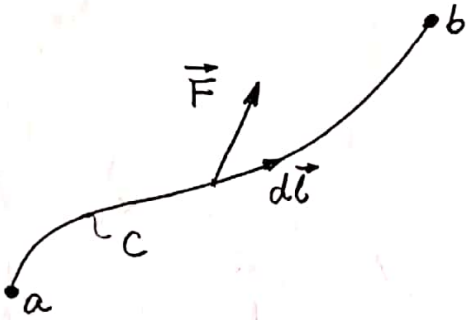
NOVO: 10, 11, 13, 19, 27, 29, 34, 37, 40, 42, 43, 44, 51, 52, 53, 54, 55, 57, 61, 62, 65

3. POTENCIAL ELÉTRICO

TRABALHO

O trabalho realizado por uma força $\vec{F}$, ao longo do caminho C que vai de um ponto a até um ponto b, é definido como

$$W^{C}_{a\to b} = \int_{a,C}^{b} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



Se $\vec{F}$ for a força resultante que atua sobre uma partícula de massa m, então

$$W_{a\to b} = K_b - K_a$$

onde K_a e K_b são as energias cinéticas nos pontos a e b, respectivamente.

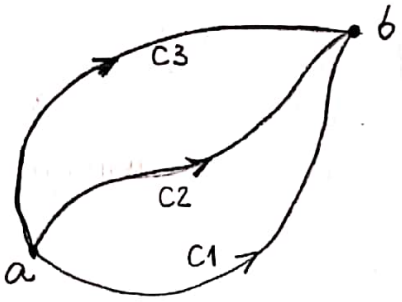
FORÇA CONSERVATIVA

A força $\vec{F}$ é dita conservativa se o trabalho realizado por ela não depender do caminho que vai de a até b, ou seja, se

$$W^{C1}_{a\to b} = W^{C2}_{a\to b} = W^{C3}_{a\to b} = \dots$$

Desta relação, temos

$$W^{C1}_{a\to b} - W^{C2}_{a\to b} = 0$$



Por outro lado, pode-se ver que

$$W^{C2}_{a\to b} = -W^{C2}_{b\to a}$$

porque $d\vec{l}$ muda de sentido quando invertemos o sentido do caminho.

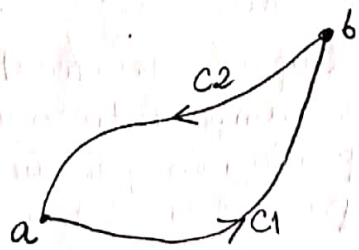
Substituindo a última equação na penúltima, obtemos

$$W^{C1}_{a\to b} + W^{C2}_{b\to a} = 0$$

ou

$$\oint_{C1+C2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$$

onde a notação $\oint_{C1+C2}$ indica que o trabalho é calculado no caminho fechado abaixo



Generalizando o argumento acima, podemos concluir que

Digitalizado com CamScanner

se a força for conservativa,

$$\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

para qualquer caminho fechado.

ENERGIA POTENCIAL

Quando a força é conservativa pode-se associar a ela uma energia potencial definida através da expressão

$$U_b - U_a = -W_{a\to b}$$

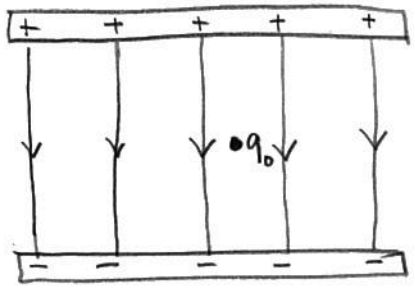
$$= -\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

De fato, a eq. acima define apenas a diferença de energia potencial. Para definirmos a energia potencial devemos fazer $U=0$ em um ponto escolhido arbitrariamente. Fazendo $U_a = 0$, temos

$$U_b = -\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

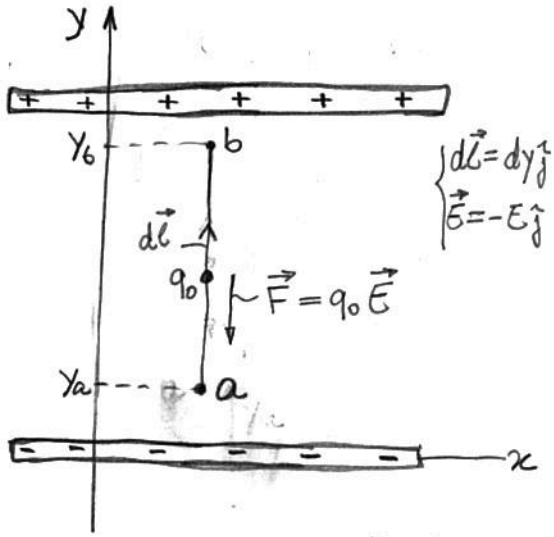
CARGA PONTUAL EM UM CAMPO ELÉTRICO UNIFORME

Considere uma carga de prova q_0 (suposta positiva) em um campo elétrico uniforme produzido por duas placas paralelas infinitas, carregadas com cargas de sinais opostos.



O trabalho da força elétrica é dado por

$$W_{a\to b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



note que $\vec{E}$ é contrário a $d\vec{\ell}$.

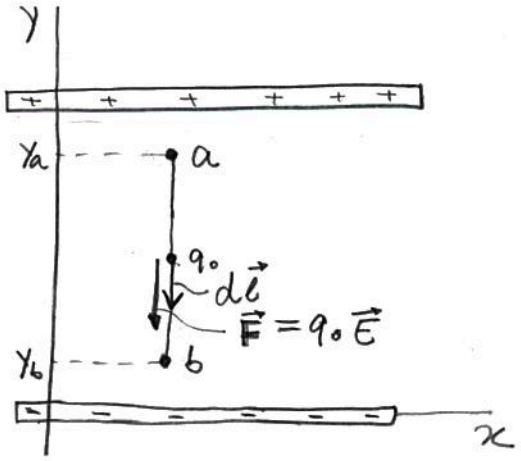
$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E\,dy$$

$$W_{a\to b} = -q_0 \int_{y_a}^{y_b} E\,dy = -q_0 E \int_{y_a}^{y_b} dy$$

$$W_{a\to b} = -q_0 E (y_b - y_a)$$

Se $y_b > y_a$ (como na figura acima), $W_{a\to b} < 0$ porque a força é contrária ao deslocamento.

Se $y_b < y_a$ (figura abaixo), $W_{a\to b} > 0$ porque a força é no sentido do deslocamento.



Note que a expressão obtida é coerente com as duas figuras.

A variação da energia potencial é

$$U_b - U_a = -W_{a\to b}$$

$$= qE(y_b - y_a)$$

Se escolhermos $y_a = 0$ e fizermos $U_a = 0$, podemos escrever

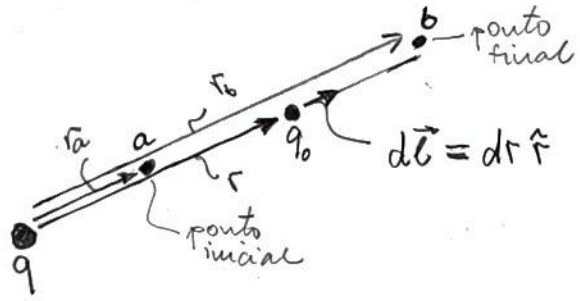
$$U_b = qEy_b$$

ou simplesmente

$$U(y) = qEy$$

DUAS CARGAS PONTUAIS

(1) CAMINHO RADIAL



$$U_b - U_a = -\int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{\ell}$$

$$= -\int_a^b q_0\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

Como $\vec{E}$ e $d\vec{\ell}$ são paralelos, podemos escrever $\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E\,dr$

$$U_b - U_a = -q_0\int_a^b E\,dr$$

$$= -q_0\int_{r_a}^{r_b}\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,dr$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}\Big|_{r_a}^{r_b}$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

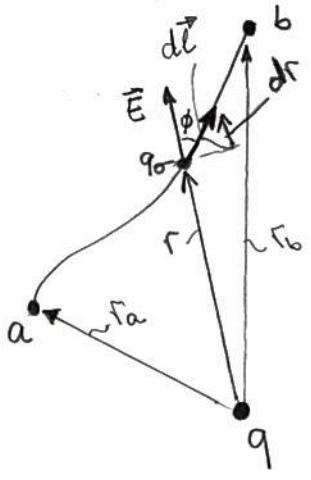
É conveniente fazer $r_a \to \infty$ e $U(\infty) = 0$, de forma que

$$U_b = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$

ou simplesmente

$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(2) CAMINHO NÃO RADIAL



$$U_b - U_a = -q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Mas $\vec{E} \cdot d\vec{l} = E\, dl \cos\phi = E\, dr$, de forma que

$$U_b - U_a = -q_0 \int_a^b E\, dr$$

que leva ao mesmo resultado do caso do caminho radial. Em outras palavras, o trabalho realizado pela força elétrica só depende de r_a e r_b e não do caminho. Se escolhermos $U(\infty) = 0$ podemos escrever novamente

$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

POTENCIAL ELÉTRICO

Quando uma carga q_0 é levada de um ponto a até um ponto b sob a ação de um campo elétrico $\vec{E}$, a variação de energia potencial é dada por

$$U_b - U_a = -q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Define-se a diferença de potencial (ddp) entre os pontos a e b como

$$V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0}$$

de forma que

$$\boxed{V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad (A)}$$

se escolhermos fazer $V_a = 0$, temos

$$V_b = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A escolha do ponto a, onde se faz $V_a = 0$, é arbitrária.

Note que (veja pag. 2)

$$V_b = \frac{U_b}{q_0}$$

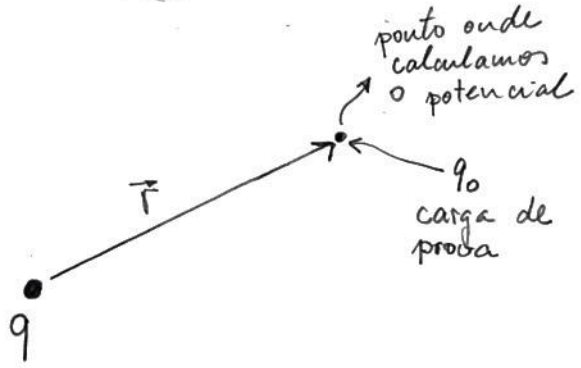
POTENCIAL DE UMA CARGA PONTUAL

No caso de uma carga pontual q, mostramos que

$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

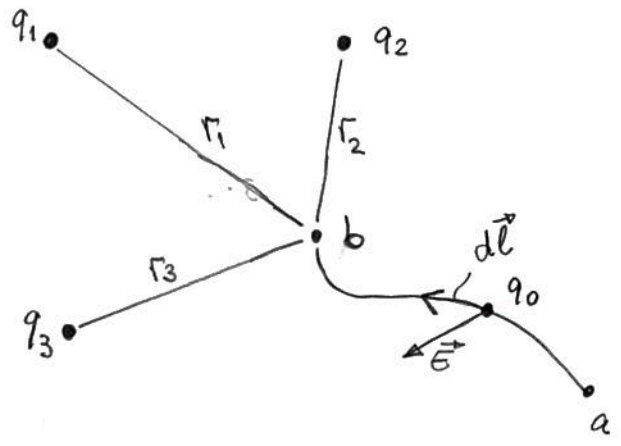
de forma que

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



Como ocorre com o campo elétrico, o potencial não depende da carga de prova q_0.

VÁRIAS CARGAS PONTUAIS



Pelo princípio da superposição, o campo sentido por q_0 em qualquer ponto do espaço é

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$$

Assim

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_a^b (\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3)\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_a^b \vec{E}_1\cdot d\vec{l} - \int_a^b \vec{E}_2\cdot d\vec{l} - \int_a^b \vec{E}_3\cdot d\vec{l}$$

$$= (V_{1b}-V_{1a}) + (V_{2b}-V_{2a}) + (V_{3b}-V_{3a})$$

Se escolhermos o ponto a no infinito e fizermos $V=0$ neste ponto, temos

$$V_b = V_{1b} + V_{2b} + V_{3b}$$

ou

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3}\right)$$

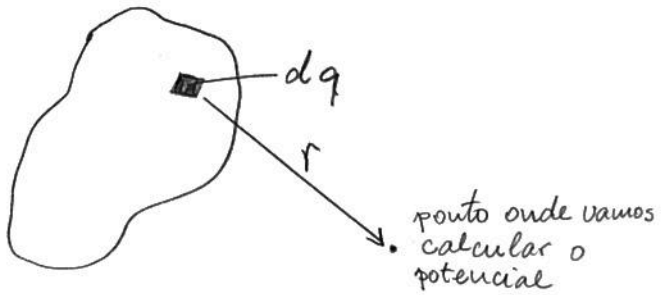
O potencial do sistema de cargas é a soma algébrica dos potenciais individuais.

Para um sistema de n cargas o potencial é dado por

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$$

onde r_i é a distância da carga q_i até o ponto onde estamos calculando o potencial

DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r} \qquad (B)$$

onde

$$dq = \begin{cases} \rho\, dv & \text{dist volumétrica} \\ \sigma\, dA & \text{dist superficial} \\ \lambda\, dl & \text{dist linear} \end{cases}$$

Note que na expressão acima está implícita a escolha $V(\infty)=0$.

ENERGIA POTENCIAL DE UM SISTEMA DE CARGAS

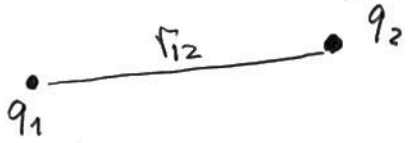
Quando uma carga pontual q é colocada num ponto $\vec{r}$ onde existe um potencial $V(\vec{r})$, a energia potencial é dada por

$$U = q\,V(\vec{r})$$

Considere agora uma carga q_1 situada em um ponto do espaço e suponha que não existam outras cargas nas proximidades deste ponto. Então q_1 não "sente" nenhum potencial, de forma que

$$U = 0$$

Agora uma carga q_2 é trazida do infinito (muito longe) e colocada a uma distância r_{12} de q_1.



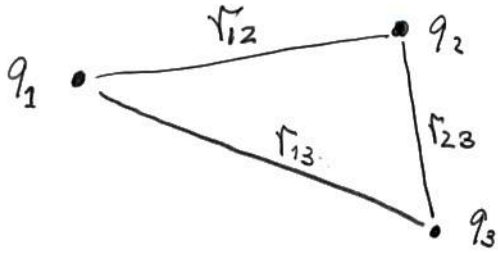
q_2 sente um potencial, devido a q_1, dado por

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$ → potencial sentido por q_2

de forma que a energia potencial é

$$U = q_2 V_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

Em seguida trazemos uma carga q_3 para perto de q_1 e q_2



q_3 sente um potencial, devido a q_1 e q_2, dado por

$$V_3 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$ potencial sentido por q_3.

A energia potencial do sistema agora é dada por

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + q_3 V_3$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + q_3\left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}\right)$$

ou ainda

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right)$$

Para um sistema de n cargas podemos escrever

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j>i}^{n}\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

onde a restrição $j>i$ impede que um mesmo par seja contado duas vezes. Outra forma de escrever esta expressão é

$$U = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

Agora cada par é contado duas vezes mas para compensar dividimos por 2. A restrição $i\neq j$ evita contar a interação de uma carga com ela própria.

Uma terceira forma de escrever a equação acima é:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j\neq i}^{n}\frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Mas

$$V_i = \sum_{j\neq i}^{n} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

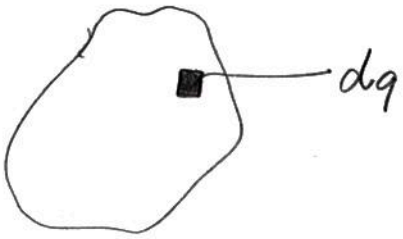
é o potencial sentido pela carga q_i devido a todas as outras cargas, de forma que podemos escrever

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$

Para uma distribuição contínua podemos trocar o somatório por uma integral do tipo

$$U = \frac{1}{2}\int V\, dq$$

onde V é o potencial no ponto onde está o elemento de carga dq.



UNIDADES

A dimensão de potencial elétrico é dada por

$$[V] = [E][L]$$

onde [ ] quer dizer dimensão de e L indica comprimento. A unidade de V no SI é

$$\frac{N}{C}\cdot m \equiv V \text{ (volt)}$$

Note que

$$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$ (unidade de campo elétrico)

ELÉTRON-VOLT

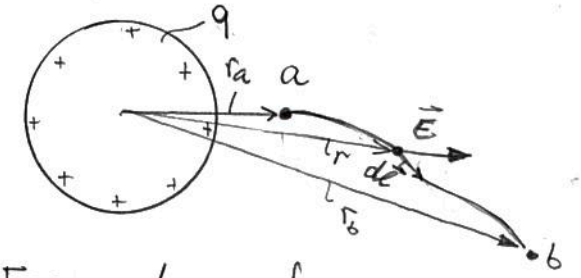
Quando uma partícula de carga e é deslocada de um ponto a até um ponto b, cuja ddp é 1V, a energia potencial varia por

$$\Delta U = e\Delta V$$
$$= 1{,}60\times10^{-19}\,C \times 1\,V$$
$$= 1{,}60\times10^{-19}\,J \qquad C\cdot V = N\cdot m \equiv J$$

Esta energia é chamada elétron-volt (eV) e é usada como unidade de energia em física atômica e molecular.

ESFERA CONDUTORA CARREGADA (Ex. 23-8)

(1) $r > R$.



Fora da esfera

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

ver a carga pontual, caminho não radial, pag 3.

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = E\,dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_a^b E\,dr$$

$$= -\int_{r_a}^{r_b} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr$$

$$V_b - V_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

Fazendo $r_a \to \infty$, escolhendo $V(\infty) = 0$ e fazendo $r_b \equiv r$, temos

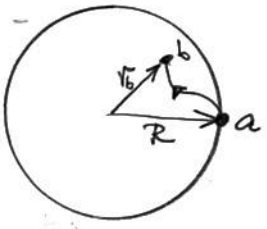
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

que é o mesmo resultado obtido para a carga pontual.

(2) $r < R$.

Agora vamos escolher o ponto a na superfície da esfera. Assim

$$V_a = V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$



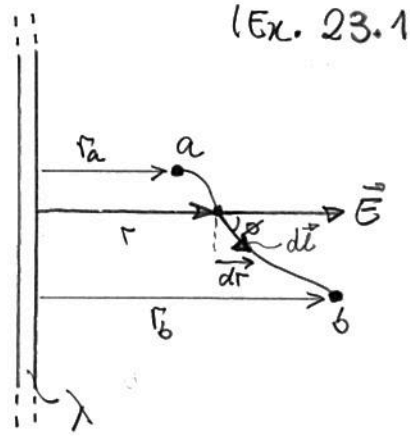
$$V_b - V_a = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

Mas como o caminho está todo dentro da esfera condutora, $\vec{E} = 0$. Assim a integral é nula e

$$V_b = V_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Como este resultado vale para qualquer ponto b no interior da esfera, podemos dizer que o potencial é constante no interior da esfera.

FIO INFINITO CARREGADO (Ex. 23.10)



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} \qquad (\text{Ex. } 23.6)$$

$$\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E\,d\ell\cos\phi = E\,dr$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_a^b E\,dr$$

$$= -\int_{r_a}^{r_b} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,dr$$

$$= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r\Big|_{r_a}^{r_b}$$

$$V_b - V_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{r_a}{r_b}\right)$$

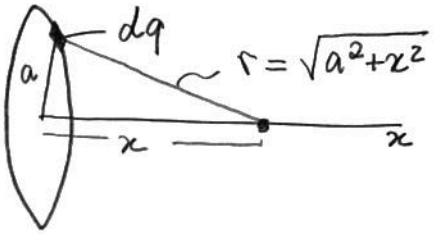
Perceba que a ddp não depende do caminho de integração; só das distâncias r_a e r_b.

Neste caso não podemos fazer $V_a = 0$ com $r_a \to \infty$ porque teríamos $V_b \to \infty$.

Fazendo $V_a = 0$ para r_a finito e $r_b = r$, temos

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_a}{r}\right)$$ ← ponto de referência onde $V=0$.

ANEL CARREGADO (Ex. 23.11)



Neste caso é mais fácil usar a eq. (B) em vez da eq. (A). Assim

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\underbrace{\int dq}_{Q}$$

$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

onde Q é a carga total do anel.

Note que se $x \gg a$

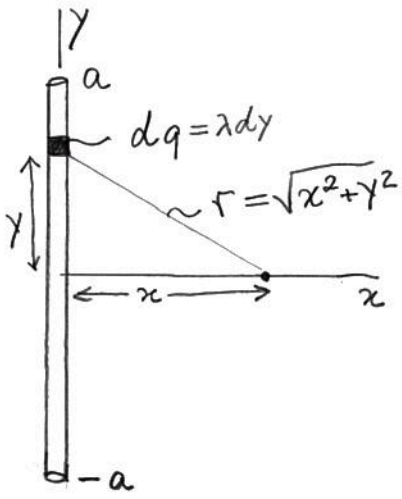
$$V(x) \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

que é o potencial de uma carga pontual. Se $a \gg x$,

$$V \simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

FIO CARREGADO (Ex. 23.12)

Considere um fio de comprimento 2a carregado com uma carga total Q.



$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dq = \lambda\, dy = \frac{Q}{2a}\, dy$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{2a}\int_{-a}^{a}\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

O resultado desta integral é (vega pag 13)

$$\int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)$$

substituindo os limites, temos

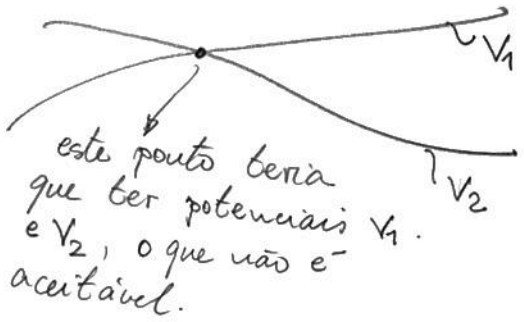
$$V(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{Q}{2a}\ln\left[\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+a^2}-a}\right]$$

Note que não é possível tomar o limite $a \to \infty$ porque teríamos $V(x) \to \infty$. Isto ocorre porque na eq. (B) está implícita a escolha $V(\infty)=0$, o que não pode ser feito no caso do fio infinito carregado (Ex. 24.10). Este tipo de situação aparece toda vez que tivermos distribuições de carga que se estendem até o infinito.

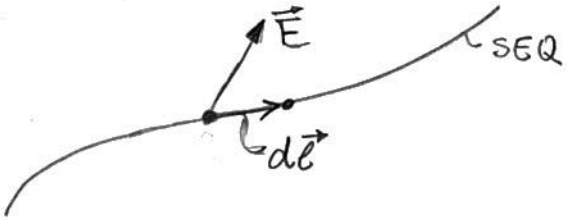
SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS

são superfícies onde o potencial elétrico é constante.

Duas superfícies equipotenciais (SEQ) diferentes não podem se cruzar porque os pontos de intersecção teriam que possuir dois potenciais diferentes.



Considere dois pontos sobre a mesma SEQ.



A variação de energia potencial entre os dois pontos é dada por

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

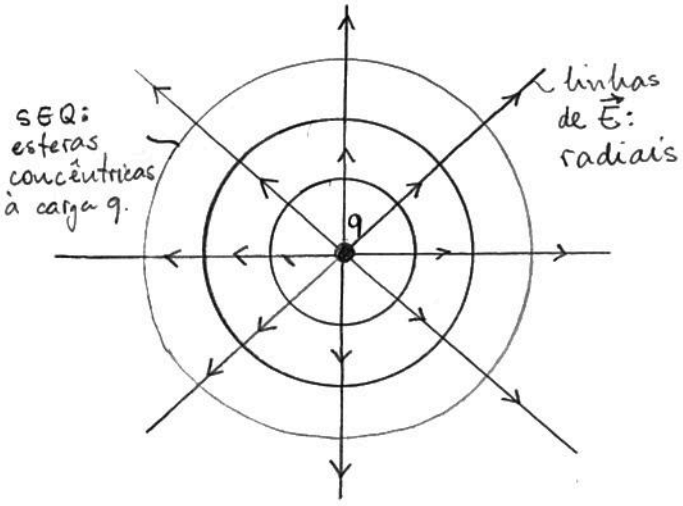
Mas como os dois pontos estão sobre a mesma SEQ, $dV = 0$, de forma que

$$\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

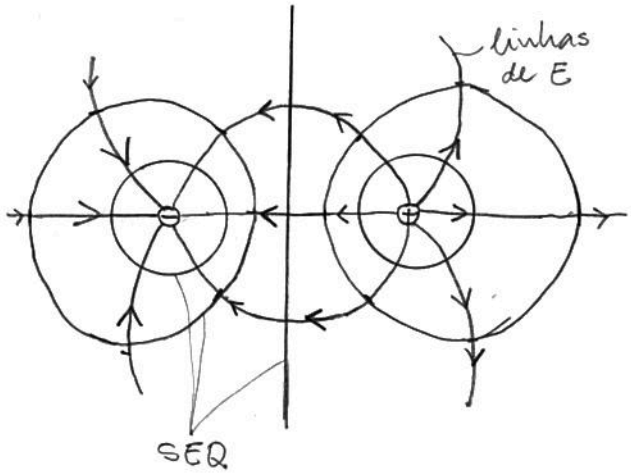
Portanto, $\vec{E}$ é perpendicular a $d\vec{\ell}$. Como $d\vec{\ell}$ é um deslocamento qualquer contido na SEQ, $\vec{E}$ é perpendicular à SEQ. Como as linhas de força são paralelas a $\vec{E}$, elas são perpendiculares às SEQ's.

EXEMPLO: CARGA PONTUAL

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \qquad V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



DUAS CARGAS COM SINAIS OPOSTOS



FORÇA ELÉTRICA CONSERVATIVA

Uma vez que a força elétrica é conservativa, podemos escrever

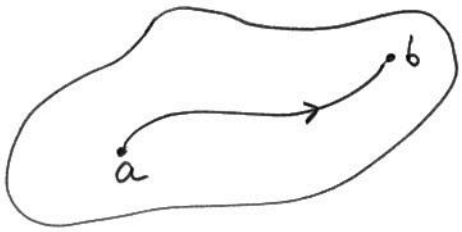
$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

para qualquer caminho de integração fechado. Então

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

Uma das equações fundamentais da eletrostática.

POTENCIAL EM UM CONDUTOR



A ddp entre os pontos b e a é dada por

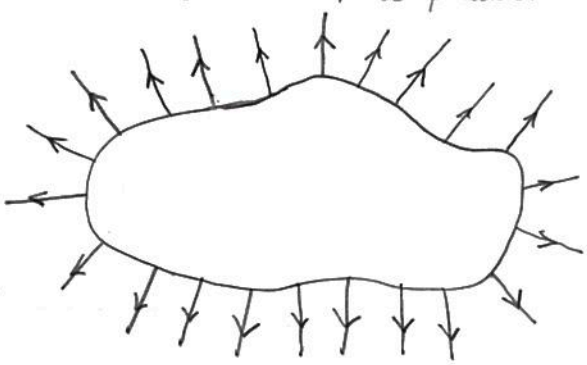
$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Como $\vec{E} = 0$ em todos os pontos do condutor, a integral é nula. Assim

$$V_b = V_a$$

Então todos os pontos no interior do condutor têm o mesmo potencial.

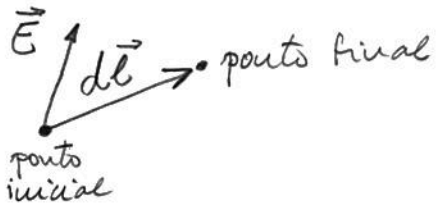
Em particular, a superfície externa de um condutor é uma SEQ. Assim as linhas de campo elétrico são perpendiculares a ela. Fora do condutor, o campo elétrico é normal à superfície.
Vimos este resultado no capítulo passado.



GRADIENTE DE POTENCIAL

A ddp entre dois pontos separados por um deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ é dada por

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Em coordenadas cartesianas

$$d\vec{l} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$$

e

$$\vec{E} = E_x\,\hat{i} + E_y\,\hat{j} + E_z\,\hat{k}$$

Assim

$$dV = -E_x\,dx - E_y\,dy - E_z\,dz$$

Supondo $V \equiv V(x, y, z)$, temos

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

Comparando as duas expres-

sões, temos

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

ou

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}$$

Define-se o gradiente de uma função escalar $f(x,y,z)$ em coordenadas cartesianas como

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Assim, podemos escrever,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Em coordenadas esféricas, a componente radial de $\vec{E}$ pode ser escrita como

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

CARGA PONTUAL (ex. 23.13)

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \rightsquigarrow \text{Lei de Coulomb}$$

ANEL CARREGADO (Ex. 24.15)

Do ex 23.11, sobre o eixo x,

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Então

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

de acordo com o resultado obtido no ex. 21.10.

Como V só foi calculado sobre o eixo x, não é função de y e nem z. Então não podemos calcular E_y e E_z. Mas por argumentos de simetria, podemos dizer que $E_y = E_z = 0$ sobre o eixo x.



Problemas (VELHO): 1, 3, 6, 9, 15, 16, 25, 26, 32, 34, 50, 53, 57, 58, 60 61, 63, 65, 68, 80

não tem no novo

Problemas (NOVO): 1, 5, 8, 11, 21, 22, 33, 34, 48, 49, 54, 57, 61, 62, 66, 67, 69, 72, 87

INTEGRAL

$$I = \int \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

seja $y = x\,tg\varphi$

$dy = x\sec^2\varphi\,d\varphi$

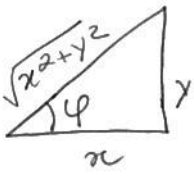
$$I = \int \frac{x\sec^2\varphi\,d\varphi}{x\sec\varphi\,d\varphi} = \int \sec\varphi\,d\varphi$$

$$I = \int \left(\frac{\sec\varphi + tg\varphi}{\sec\varphi + tg\varphi}\right)\sec\varphi\,d\varphi$$

seja $u = \sec\varphi + tg\varphi$

$du = (\sec\varphi\,tg\varphi + \sec^2\varphi)\,d\varphi$

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln u = \ln(\sec\varphi + tg\varphi)$$



$$\rightarrow \sec\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$

$$I = \ln\left[\frac{\sqrt{x^2+y^2}+y}{x}\right]$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right) - \ln x$$

este termo é uma cte e pode ser desconsiderado

$$\boxed{I = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)}$$

Respostas dos problemas pares

(23.8) 24.6 $U = 7{,}78\times10^{-2}$ J

(23.22) 24.16. (b) $V_0 = q/(2\pi\varepsilon_0 a)$

(c) $V \to q/(2\pi\varepsilon_0 x)$

(23.34) 24.26 $d_{min} = 15{,}8$ cm

(23.49) 24.34 (a) $r < r_a \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$

$r_a < r < r_b \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_b}\right)$

$r > r_b \Rightarrow V = 0$

(d) $E = 0$

(23.54) 24.50 (a) $v = e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r}$

(c) $E = -2{,}18\times10^{-18}$ J

$= -13{,}6$ eV

não tem no livro novo

24.60 (a) $V = 0$

(b) $V = \frac{Q}{\pi\varepsilon_0 a}\ln\left[\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right]$

(23.72) 24.68 (a) $r > R$, $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$r < R$, $V = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$

(23.87) 24.80 (a) $R_{fiello} = 5{,}9\times10^{-15}$ m

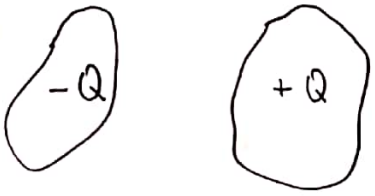
(b) $K = 2{,}1\times10^{-11}$ J

(c) $U = 250$ quiloton de TNT

4. CAPACITÂNCIA E DIELÉTRICOS

CAPACITOR

É um dispositivo formado por dois condutores separados. Nas aplicações de interesse os condutores são carregados com cargas iguais em módulo e de sinais contrários.



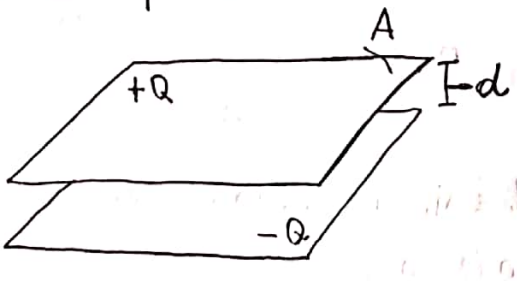
A capacitância de um capacitor é definida como

$$C = \frac{Q}{V}$$

onde V é a ddp entre o condutor de carga +Q e o condutor de carga -Q.

CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS

É formado por duas placas condutoras, planas, de área A, separadas por uma distância d (vamos supor que d << dimensões das placas).



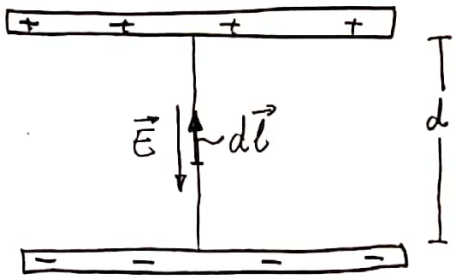
O campo elétrico entre as placas é dado por

$$E = \sigma/\epsilon_0 = Q/\epsilon_0 A$$

e aponta no sentido da placa negativa. Assim

$$V = V_+ - V_- = -\int_{-}^{+} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

(+ → placa positiva; − → placa negativa)



Da figura, temos

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = -E\,dl = -\frac{Q}{\epsilon_0 A}\,dl$$

$$V = \frac{Q}{\epsilon_0 A}\int_{-}^{+} dl = \frac{Q}{\epsilon_0 A}\,d$$

Isolando Q,

$$Q = \frac{\epsilon_0 A}{d}\,V$$

Por definição, a capacitância é dada por

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

A capacitância só depende de fatores geométricos. Neste caso, ela depende de A e d.

UNIDADE

Da definição de capacitância, é fácil ver que

Digitalizado com CamScanner

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]}$$

A unidade de capacitância no SI é

$$\frac{C}{V} = F \text{ (farad)}$$

Em geral, a capacitância de qualquer capacitor é dada por

$C = \epsilon_0 \times$ algo com dimensão de comprimento

Assim ϵ_0 pode ser expresso no SI em F/m, ou seja,

$$\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ F/m$$

Ex-24.1. Considere um capacitor com placas planas e paralelas separadas por 1,0 mm. Qual deve ser A para que $C = 1F$?

Sol.

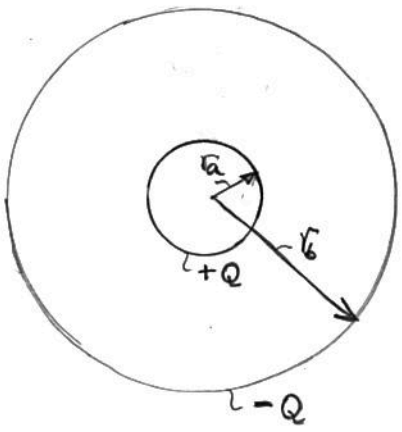
$$A = \frac{dC}{\epsilon_0} = \frac{10^{-3}m \times 1F}{8{,}85 \times 10^{-12} F/m}$$

$$A \simeq 1{,}1 \times 10^{8}\ m^2$$

o que corresponderia a uma placa quadrada de lado $\ell \simeq 10^4 m = 10 km$. Note o quanto o F é uma uma unidade grande!

CAPACITOR ESFÉRICO (Ex. 24.3)

É formado por duas cascas esféricas concêntricas (a de dentro pode ser uma esfera condutora maciça).



$$V = V_+ - V_- = -\int_{-}^{+} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = +\int_{-}^{+} \vec{E}\cdot d\vec{\ell}$$

o caminho de integração é de dentro para fora

Mas $\vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E\,dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,dr$

Assim

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}\Big|_{r_a}^{r_b}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

ou $$Q = \frac{4\pi\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a}\,V$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a}$$

C só depende dos fatores geométricos r_a e r_b.

Caso especial:

$d \equiv r_b - r_a \ll r_a$.

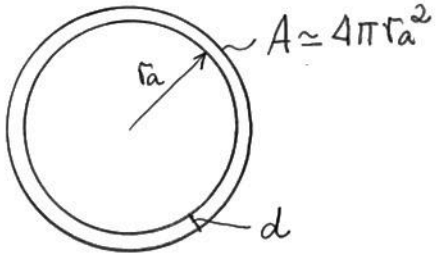
Podemos considerar $r_b \simeq r_a$ no numerador, de forma que

$$C \simeq \frac{4\pi\epsilon_0 r_a^2}{d}$$

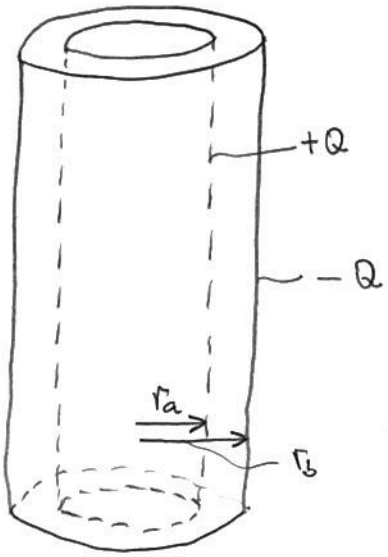
É como se tivéssemos duas placas paralelas de área $A = 4\pi r_a^2$ separadas por uma distância d. A capacitância pode ser escrita como

$$C \simeq \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

como no caso do capacitor de placas planas paralelas.



CAPACITOR CILÍNDRICO (Ex. 24.4)



São duas cascas cilíndricas, condutoras, coaxiais. (a de dentro pode ser um cilindro maciço).

$$V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

caminho de dentro para fora

$$\vec{E}\cdot d\vec{l} = E\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\,dr$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln r\Big|_{r_a}^{r_b}$$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

Supondo que os cilindros tenham comprimento l, $\lambda = Q/l$, de forma que

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 l}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(r_b/r_a)}V$$

A capacitância é dada por

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(r_b/r_a)}$$

Note que C só depende dos fatores geométricos r_a, r_b e l.

Caso especial:

$$d \equiv r_b - r_a \ll r_a$$

$$\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right) = \ln\left(\frac{r_a + d}{r_a}\right) = \ln\left(1 + \frac{d}{r_a}\right)$$

como $d/r_a \ll 1$, podemos usar a expansão

$$\ln(1+x) \simeq x$$

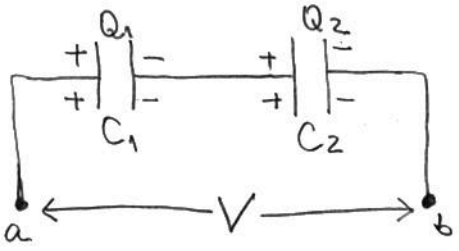
$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{d}{r_a}\right) \simeq \frac{d}{r_a}$$

Portanto

$$C \simeq \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{d/r_a} = \frac{\varepsilon_0 2\pi r_a \ell}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

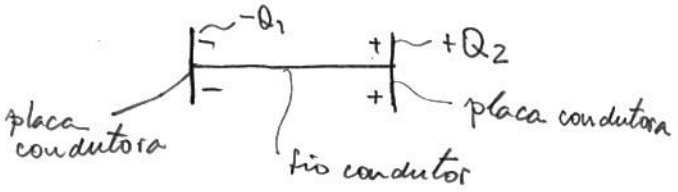
onde $A = 2\pi r_a \ell$ é a área das placas cilíndricas.

CAPACITORES EM SÉRIE



Vamos supor $V_a > V_b$. Assim $V = V_a - V_b$.

Supondo que os capacitores estejam inicialmente descarregados, a carga total no trecho do meio é zero, o que implica que $Q_1 = Q_2$.



As ddp's nos dois capacitores são

$$V_1 = \frac{Q}{C_1}, \qquad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

A ddp total é

$$V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$\Rightarrow Q = V \Big/ \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

A capacitância equivalente é

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

ou

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Para n capacitores em série

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

Note que

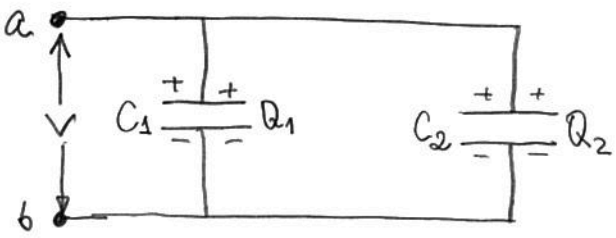
$$\frac{1}{C_{eq}} > \frac{1}{C_1} \Rightarrow C_{eq} < C_1$$

Em geral,

C_{eq} < qualquer das capacitâncias

CAPACITORES EM PARALELO

A ddp é a mesma para todos os capacitores



As placas condutoras superiores formam um único condutor que está no potencial V_a. Por sua vez, as placas inferiores formam um único condutor no potencial V_b. A carga total é dada por

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Como $Q_1 = C_1 V$

$$Q_2 = C_2 V$$

então, $Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$

A capacitância equivalente é

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2$$

Para n capacitores em paralelo

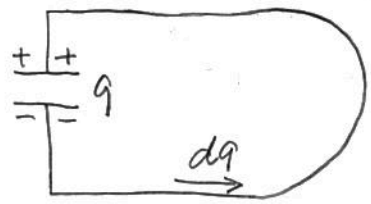
$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

Note que

C_{eq} > qualquer das capacitâncias.

ENERGIA ARMAZENADA EM UM CAPACITOR CARREGADO

Considere um capacitor sendo carregado por uma bateria. Suponha que a carga vai sendo transferida da placa − para a placa + aos poucos.



No instante em que a carga no capacitor é q o potencial é

$$V = \frac{q}{C}$$

Quando uma carga dq sai da placa − e vai para a placa + a energia potencial muda por

$$dU = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

A energia total armazenada desde o instante em que a carga no capacitor é zero até o instante em que ela atinge o valor Q é

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q\,dq}{C} = \frac{Q^2}{2C}$$

Como $Q = CV$, onde V é a ddp final, podemos escrever

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$

CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS

Para o capacitor de placas planas paralelas

$$C = \varepsilon_0 A / d$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 A}{d} V^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} A d \left(\frac{V}{d}\right)^2$$

Considerando que $E = V/d$ é o campo elétrico entre as placas e $v = Ad$ é o volume delimitado pelas placas, podemos escrever

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 v$$

A densidade de energia na região entre as placas é dada por

$$u = \frac{U}{\vartheta} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Podemos interpretar esta energia como estando armazenada no campo elétrico. Observe que só há campo elétrico na região entre as placas.

Pode-se mostrar que a fórmula acima é sempre válida, embora tenha sido obtida aqui para o caso particular de um capacitor de placas planas paralelas.

CAPACITOR ESFÉRICO (Ex 24.9)

Considere um capacitor esférico carregado com uma carga Q. Vamos calcular a energia armazenada de duas maneiras

(a) $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2 \times \frac{4\pi\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a}}$

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

(b) O campo elétrico na região $r_a < r < r_b$ é

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Para $r < r_a$ e para $r > r_b$, $E = 0$.

A densidade de energia na região $r_a < r < r_b$ é

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2$$

$$u = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

A energia armazenada é dada por

$$U = \int u\, d\vartheta = \int_{r_a}^{r_b} \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{r_a}^{r_b}$$

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$$

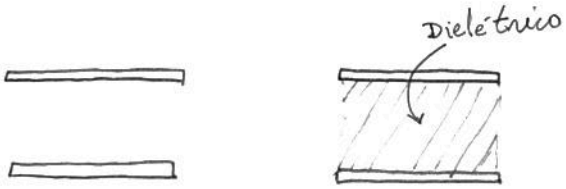
ou

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

No caso (a) supomos a energia armazenada na carga elétrica e no caso (b) no campo elétrico. Ambas as interpretações levam ao mesmo resultado.

DIELÉTRICOS

Faraday verificou em 1837 que quando o espaço entre as placas de um capacitor é preenchido com um material isolante (dielétrico) a capacitância fica multiplicada por um fator K que depende somente do material (não depende da forma geométrica do capacitor).



C_0 $\qquad$ $C = KC_0$

Experimentalmente verifica-se que $K \geq 1$. $K = 1$ para o vácuo e $K = 1{,}0006$ para o ar.

Se a carga no capacitor for mantida fixa,

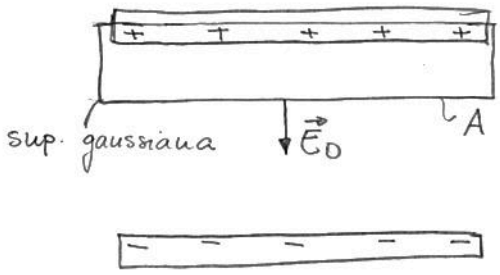
$$Q = C_0 V_0 = CV$$

$$\Rightarrow \frac{V}{V_0} = \frac{C_0}{C} = \frac{1}{K}$$

ou $\quad V = \dfrac{V_0}{K}$

Para uma carga no capacitor fixa, a ddp fica reduzida por um fator K quando o dielétrico é inserido entre as placas!

Considere um capacitor plano vazio. Vamos aplicar a lei de Gauss à superfície gaussiana da figura



$$\oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E_0 A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

onde σ é a densidade superficial de carga nas placas condutoras.

Agora imagine o capacitor preenchido com um dielétrico. Como a ddp se modifica, o campo elétrico entre as placas também muda.

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= E_0 d \\ V &= E d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{E}{E_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{1}{K}$$

Mas se o campo elétrico mudou, a densidade de carga deve ter mudado. Aplicando a lei de Gauss na presença do dielétrico temos

$$E = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

onde σ' é a nova densidade

de carga no interior da superfície gaussiana.

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{1}{K} \Rightarrow \sigma' = \frac{\sigma}{K}$$

Como $K > 1$, $\sigma' < \sigma$.

Mas, como a carga na placa não mudou, por que a carga no interior da superfície gaussiana se modificou? A resposta é: surgem cargas de sinais opostos nas superfícies do dielétrico que blindam as cargas das placas condutoras. Vamos fazer

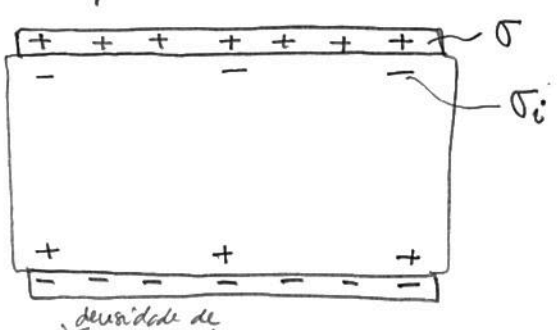
$$\sigma' = \sigma - \sigma_i$$

onde σ é chamado densidade de carga livre (nas placas condutoras) e σ_i densidade de carga induzida (nas faces do dielétrico). Então

$$\frac{\sigma}{K} = \sigma - \sigma_i$$

$$\Rightarrow \sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

Note que $\sigma_i < \sigma$.



$\sigma \rightarrow$ densidade de carga livre

$\sigma_i \rightarrow$ carga ligada

$\sigma' \rightarrow$ carga líquida ou total

Define-se a permissividade do dielétrico como

$$\epsilon = K\epsilon_0$$

de forma que o campo elétrico no dielétrico é escrito como

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{\sigma}{K\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

A capacitância com o dielétrico é dada por

$$C = KC_0 = \frac{K\epsilon_0 A}{d} = \frac{\epsilon A}{d}$$

É fácil mostrar também que a densidade de energia é

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$$

Note que, como K é um número, ϵ tem as mesmas unidades de ϵ_0.

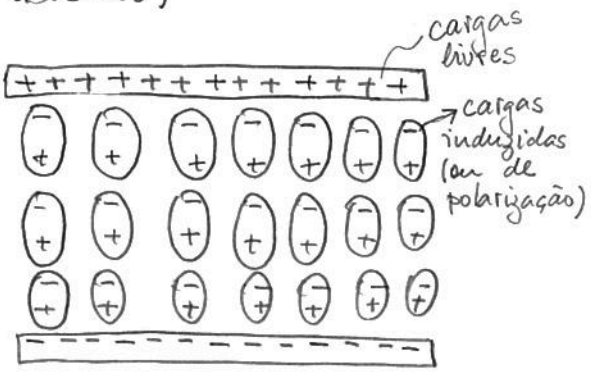
POLARIZAÇÃO

A seguir vamos mostrar por que surgem as cargas de polarização. Vamos considerar dois casos.

(1) Materiais formados de átomos ou moléculas apolares.

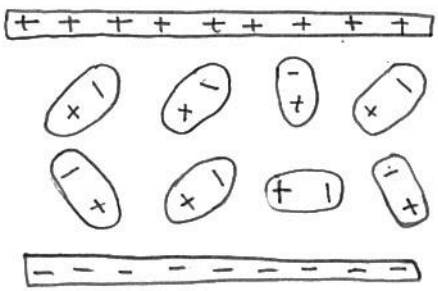
Na ausência de campo elétrico aplicado o centro das cargas + coincide com

o centro das cargas −, de forma que não há momento de dipolo. A aplicação de um campo elétrico, devido às cargas das placas condutoras, desloca os centros das cargas + e − em sentidos opostos gerando um momento de dipolo induzido em cada molécula (ou átomo)



(2) Gás ou líquido formado de moléculas polares

Na ausência de campo aplicado os dipolos das moléculas apontam em direções aleatórias dando um dipolo médio nulo. Com a aplicação do campo, os dipolos tendem a se alinhar com ele, criando um dipolo líquido.



O alinhamento dos dipolos com o campo não é completo por causa da agitação térmica das moléculas. Quanto mais intenso for o campo elétrico e quanto menor for a temperatura, maior será o grau de alinhamento dos dipolos com o campo. (veja o prob. 21.64)

RIGIDEZ DIELÉTRICA

É o valor máximo do campo elétrico que o material pode suportar sem se tornar condutor. Tem unidade de V/m no SI.

Problemas sugeridos (VELHO)
8, 9, 12, 13, 20, 21, 23, 24, 27, 32, 33, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 62

NOVO
18, 15, 20, 21, 28, 29, 35, —, 39, 44, 45, 59, 66, 67, 68, —, 70, 71, 72, 76

A fig do 18 (novo) corresponde à do 8 (velho) mas os problemas não são iguais.

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PARES

25.8 (a) $Q_1 = 30,9\ \mu C$

$Q_2 = 51,4\ \mu C$

$Q_3 = 82,3\ \mu C$

(b) $V_1 = V_2 = 10,3\ V$

$V_3 = 13,7\ V$

(c) $V_{ad} = 10,3\ V$

25.20 (24.28) (a) $Q_0 = C V_0$

(b) $V = \frac{2}{3} V_0$

(c) $U = \frac{1}{3} C V_0^2$

(d) $\frac{1}{6} C V_0^2$

25.24 (a) $V = 38,7\ V$

(b) $U = 6,39 \times 10^{-8}\ J$

25.32 (24.44) (a) $\Delta Q = 6,3\ \mu C$

(b) $Q_1 = 6,3\ \mu C$

(c) nenhum

25.50 (24.66) (a) $C = \frac{\epsilon_0 A}{d-a}$

(b) $C = C_0 \frac{d}{d-a}$

25.52 (24.68) (a) $u = 0$

(b) $u = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$

(c) $U = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}$

25.54 (24.70) (a) $u = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0 r^2}$

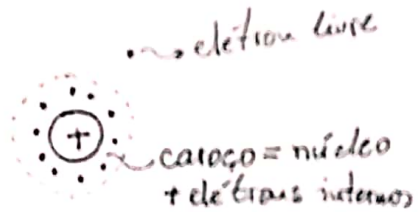
(b) $U = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$

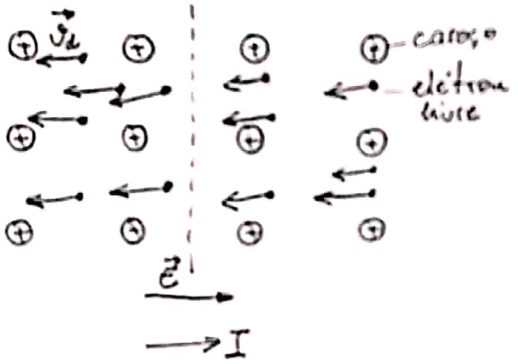
5. CORRENTE, RESISTÊNCIA E FORÇA ELETROMOTRIZ

CORRENTE

Qualitativamente falando, uma corrente é um movimento de cargas elétricas.

* Corrente em um metal





$\vec{v}_d$ é a velocidade média dos elétrons, chamada velocidade de deslocamento ou de arraste.

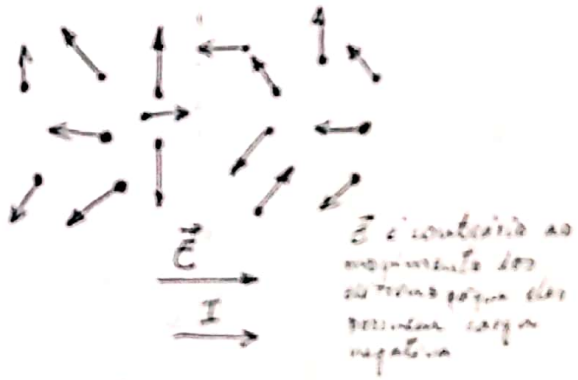
Na verdade os elétrons têm velocidades diferentes que apontam em direções aleatórias com magnitudes dependentes da temperatura. Na ausência de campo elétrico, o mesmo número de elétrons que atravessa a superfície para a esquerda também a atravessa para a direita: a corrente é zero.



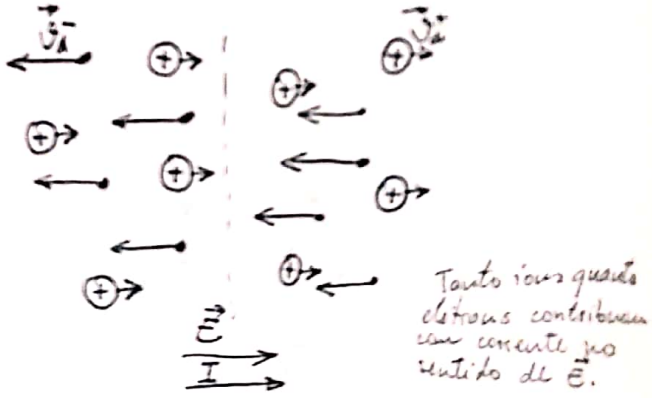
$\vec{E} = 0$

$I = 0$

O campo elétrico cria uma direção preferencial, e consequentemente, surge uma corrente.



* Corrente em uma descarga em gás. Na média, íons positivos se movem no sentido do campo elétrico e elétrons se movem no sentido contrário.

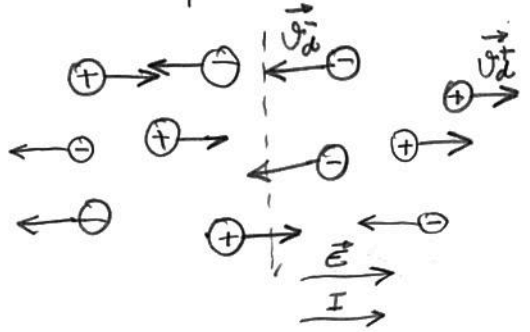


Como os elétrons são mais leves, se movem mais rápido

Digitalizado com CamScanner

e contribuem mais para a corrente.

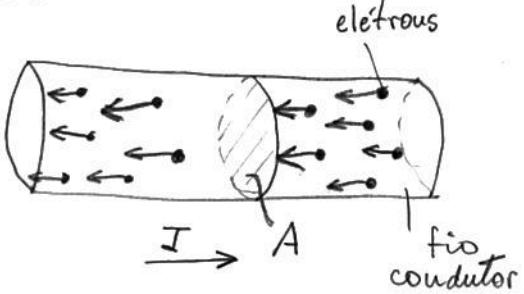
* Corrente em uma solução iônica. Íons positivos se movem no sentido de $\vec{E}$ e íons negativos no sentido oposto.



Define-se a intensidade de corrente elétrica (ou simplesmente corrente) através de uma seção de um condutor como sendo

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Por convenção, I tem o mesmo sentido do movimento dos portadores se eles forem positivos e sentido contrário se eles forem negativos. No caso de elétrons se movendo em um metal, temos



Note que I é uma grandeza escalar. A unidade de I no SI é

$$\frac{\text{C (coulomb)}}{\text{s (segundo)}} = \text{A (ampère)}$$

DENSIDADE DE CORRENTE

Define-se o vetor densidade de corrente, $\vec{J}$, da seguinte maneira:

Módulo: $J = \frac{I}{A}$ → área da seção transversal

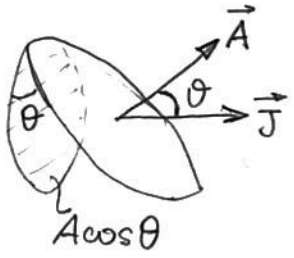
Direção: a mesma da velocidade média dos portadores ($\vec{v}_d$)

sentido: do movimento dos portadores se eles forem positivos; contrário ao movimento dos portadores se eles forem negativos.

A unidade de J no SI é

$$\frac{A}{m^2}$$

Para uma seção inclinada em relação a $\vec{J}$ temos



$$I = J A\cos\theta = \vec{J}\cdot\vec{A}$$

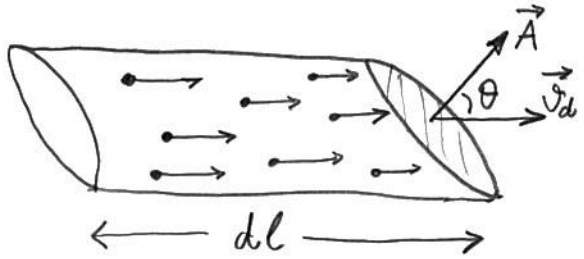
Se a área não for plana

$$I = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}$$



RELAÇÃO ENTRE $\vec{J}$ e $\vec{v}_d$

Considere um tubo imaginário contendo n portadores por unidade de volume.



O volume do tubo é

$$dV = dl\, A\cos\theta$$

se os portadores levam um tempo dt para atravessar o volume,

$$dl = v_d\, dt$$

e

$$dV = v_d dt\, A\cos\theta$$

$$= \vec{v}_d \cdot \vec{A}\, dt$$

A carga total no tubo é

$$dq = \rho dV = \rho \vec{v}_d \cdot \vec{A}\, dt$$

de forma que a corrente é dada por

$$I = \frac{dq}{dt} = \rho \vec{v}_d \cdot \vec{A}$$

Comparando com $I = \vec{J} \cdot \vec{A}$, vemos que

$$\vec{J} = \rho \vec{v}_d$$

se cada portador tiver carga q, a densidade de carga é dada por

$$\rho = nq$$ → nº portadores por volume

Assim

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

Note que, se q for positivo, $\vec{J}$ aponta no sentido de $\vec{v}_d$, e se q for negativo, $\vec{J}$ é contrário a $\vec{v}_d$.

LEI DE OHM

Verifica-se experimentalmente para vários materiais, em especial para condutores metálicos, que

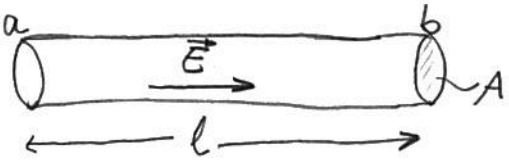
$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$

σ e ρ são constantes que dependem do material, chamadas, respectivamente, condutividade e resistividade. Note que

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$ → não confundir com densidades de carga.

RESISTÊNCIA

Considere um fio condutor de comprimento l e área de seção transversal A.



A ddp entre os pontos a e b é

$$V = V_a - V_b = \mathcal{E}\ell$$

Por sua vez, a corrente no fio é dada por

$$I = JA$$

Se o fio obedecer à lei de Ohm

$$I = \sigma \mathcal{E} A \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{I}{\sigma A}$$

Substituindo a última eq. na antipenúltima, temos

$$V = \frac{\ell}{\sigma A} I$$

que é uma forma alternativa de escrever a lei de Ohm.

Define-se a resistência do fio como

$$R = V/I \qquad (B)$$

No caso de um condutor que obedece à lei de Ohm

$$R = \frac{\ell}{\sigma A} \equiv \rho \frac{\ell}{A} \qquad (C)$$

que é uma terceira forma de escrever a lei de Ohm.

UNIDADES

Unidade de resistência no SI:

$$\frac{V(\text{volt})}{A(\text{ampère})} = \Omega(\text{ohm})$$

↳ Veja Eq. (B)

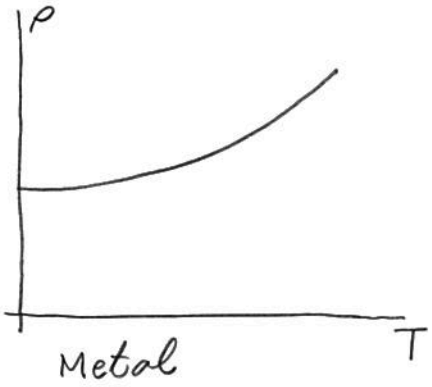
Unidade de resistividade no SI.

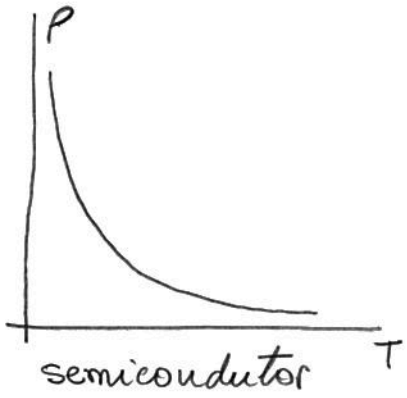
$\Omega \cdot m$ → veja Eq. (C)

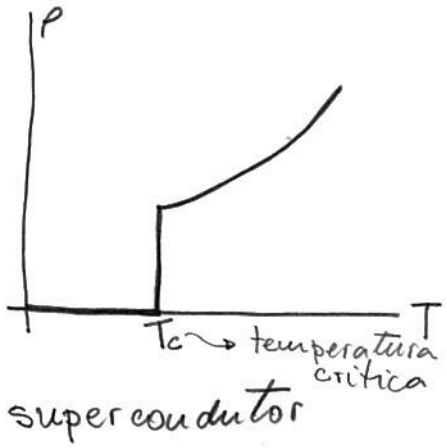
Unidade de condutividade no SI

$$(\Omega \cdot m)^{-1}$$

VARIAÇÃO DE ρ COM A TEMPERATURA: CURVAS TÍPICAS







Em geral, a resistividade de um metal pode ser estimada pela expressão

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad \nearrow \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \alpha(T - T_0)$$

onde ρ_0 é a resistividade

à temperatura T_0 e ρ a resistividade à temperatura T; α é chamado coeficiente de temperatura da resistividade. A expressão acima é boa para

$$T - T_0 \leq 100^\circ C$$

Para um resistor de comprimento l_0 e seção transversal de área A_0, podemos escrever

$$\rho \frac{l_0}{A_0} = \rho_0 \frac{l_0}{A_0} \left[1 + \alpha (T - T_0)\right]$$

se desprezarmos a dilatação do resistor temos

$$R_0 = \rho_0 \frac{l_0}{A_0} \quad \text{e} \quad R \simeq \rho \frac{l_0}{A_0},$$

† A relação exata seria $R = \rho \frac{l}{A}$

de forma que

$$R \simeq R_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right]$$

Faz sentido desprezar a dilatação porque, em geral,

$$\alpha_{resis} \sim 10^{-3}\ ^\circ C^{-1}$$

$$\alpha_{dilat} \sim 10^{-5}\ ^\circ C^{-1}$$

TEORIA DA CONDUÇÃO EM METAIS

A lei de Ohm só pode ser entendida completamente através da mecânica quântica. Entretanto, pode-se ter uma compreensão qualitativa do fenômeno através de um tratamento clássico que vamos apresentar em seguida.

CONCENTRAÇÃO DE ELÉTRONS

Seja

$$n = \frac{\text{nº elétrons livres}}{\text{volume}}$$

O cobre, por exemplo, tem um elétron livre por átomo, de forma que

$$\text{nº elétrons livres} = \text{nº átomos}$$

Mas

$$\text{nº átomos} = \frac{\text{massa do fio}}{\text{massa molar}} N_A$$

onde

$$N_A = 6.02 \times 10^{23}$$

é o número de avogadro.

$$\text{massa do fio} = \text{densidade} \times \text{volume}$$

de forma que

$$\text{nº átomos} = \frac{\text{densidade} \times \text{volume}}{\text{massa molar}} N_A$$

e

$$n = \frac{\text{densidade}}{\text{massa molar}} N_A$$

Para o cobre:

densidade $= 8{,}92\ g/cm^3$

massa molar $= 63{,}5\ g$

Fazendo a conta, obtemos

$n = 8{,}5 \times 10^{22}$ elétrons $/cm^3$

$= 8{,}5 \times 10^{28}$ elétrons $/m^3$

Obs. O Alumínio, por exemplo, possui 3 elétrons livres por átomo.

VELOCIDADE DE ARRASTE

A densidade de corrente é dada por

$$\vec{J} = -en\vec{v}_d$$

Em módulo

$$v_d = \frac{J}{ne}$$

Supondo um caso típico de um fio condutor com 2mm de raio transportando uma corrente de 1A, temos

$$J = \frac{I}{\pi a^2} = 8{,}0 \times 10^4 \ A/m^2$$

Assim

$$v_d = 5{,}9 \times 10^{-6} \ m/s = 2{,}1 \ cm/h$$

VELOCIDADE QUADRÁTICA MÉDIA

Classicamente, a energia cinética média dos elétrons livres é dada por

$$\left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

onde $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K é a constante de Boltzmann.

$\langle \ \rangle \equiv$ média.

Então

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m}$$

Define-se a velocidade quadrática média dos elétrons por meio da equação

$$v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Considerando

$T = 300K$,

$m = 9{,}11 \times 10^{-31} kg$

temos

$$v_{qm} = 1{,}2 \times 10^5 \ m/s$$

De fato, a velocidade típica dos elétrons de condução é um pouco maior. Para o cobre ela é de $1{,}6 \times 10^6$ m/s. Este resultado só pode ser obtido através da mecânica quântica.

UM MODELO CINÉTICO PARA A LEI DE OHM

Vamos imaginar os elétrons se movimentando dentro do cristal e colidindo com os núcleos. Após uma colisão, os elétrons podem ser desviados em qualquer direção de forma que, após uma colisão, $\vec{v}_{med} = 0$.

A velocidade média adquirida antes da próxima colisão é dada por

$$\vec{v}_d = \vec{a}\,\tau$$

Na minha opinião deveria ser $\vec{v}_d = \frac{1}{2}\vec{a}\,\tau$ mas isto não muda a idéia.

onde τ é o tempo médio entre duas colisões. Mas

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-e\vec{E}}{m}$$

de forma que

$$\vec{v}_d = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau$$

A densidade de corrente é dada por

$$\vec{J} = -ne\vec{v}_d = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$$

Comparando com a lei de Ohm, temos

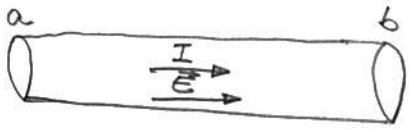
$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \Rightarrow \rho = \frac{m}{ne^2\tau}$$

Quando n e τ não dependem de $\vec{E}$, σ e ρ também não dependem e o material obedece à lei de Ohm.

O modelo cinético ajuda-nos a entender porque a resistividade de um metal aumenta quando a temperatura aumenta. Para T maior, os átomos vibram mais e o número de colisões entre elétrons e átomos aumenta. Portanto τ diminui, de forma que ρ aumenta.

POTÊNCIA EM UM RESISTOR

Considere um fio de resistência R que transporta uma corrente I



Da definição de resistência

$$V_{ab} = V_a - V_b = RI$$

O trabalho realizado pelo campo elétrico para deslocar uma carga dq do ponto a até o ponto b é dado por

$$dW_E = dq\,V_{ab}$$

Então a potência fornecida pelo campo elétrico é

$$P_E = \frac{dW_E}{dt} = V_{ab}\frac{dq}{dt} = V_{ab}I$$

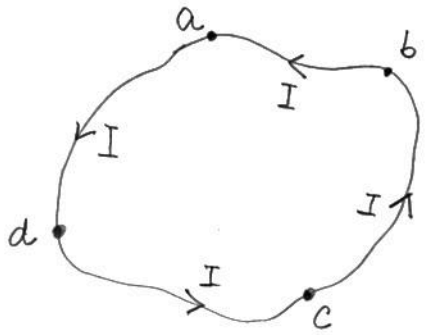
Como $V_{ab} = RI$, $P_E = RI^2$

O trabalho realizado por $\vec{E}$ é transformado em calor no fio (efeito Joule) por causa dos choques dos elétrons com os átomos. Então podemos dizer que o resistor (o fio) realiza um trabalho dissipativo dado por

$$P_R = -RI^2$$

FORÇA ELETROMOTRIZ

Considere um circuito fechado.



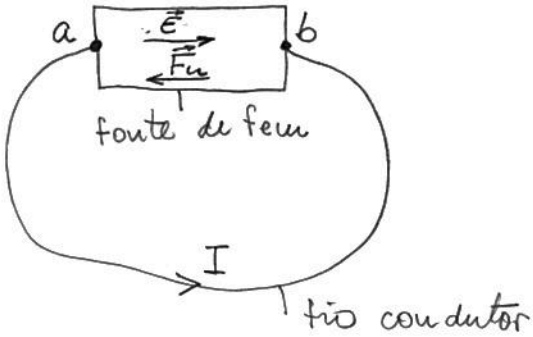
Para termos uma corrente circulando no sentido indicado devemos ter

$$V_a > V_d > V_c > V_b > V_a ,$$

o que é um absurdo!

Então para que haja uma corrente circulando deve haver algum dispositivo em algum lugar do circuito capaz de fazer a carga se mover de um ponto de potencial mais baixo para outro ponto de potencial mais alto. Tal dispositivo pode ser uma bateria, um gerador elétrico, etc., e é chamado fonte de força eletromotriz.

Na figura abaixo, suponha que $V_a > V_b$, de forma que no fio a corrente vai de a para b.



Dentro da fonte há uma força, não eletrostática, $\vec{F}_n$, que faz as cargas (supostas positivas) circularem no sentido contrário a $\vec{E}$. Em uma bateria esta força tem origem química. Em um gerador ela tem origem magnética. Dentro da fonte, o campo elétrico realiza um trabalho sobre uma porção de carga dq, dado por

$$dW_E = -dq\, V_{ab}$$

↳ $\vec{E}$ é contrário ao deslocamento de dq.

A fonte realiza um trabalho dado por

$$dW_B = dq\, \mathcal{E}$$

onde $\mathcal{E}$ é uma propriedade da fonte, chamada força eletromotriz (fem).

Supondo que a resistência da fonte seja nula, para que dq seja transportada de b até a com velocidade constante, devemos ter

$$V_{ab} = \mathcal{E}$$

Note que $\mathcal{E}$ tem dimensão de potencial elétrico (no SI é medido em volt).

No caso real onde a fonte tem resistência r devemos ter

$$dW_B + dW_\mathcal{E} + dW_r = 0$$

ou

$$dq\mathcal{E} - dq V_{ab} - r I\, dq = 0$$

($dW_r = P_r\, dt = -rI^2 dt = -rI\, dq$)

de onde concluímos que

$$V_{ab} = \mathcal{E} - rI$$

Se a resistência do fio for R, temos

$$V_{ab} = V_a - V_b = RI$$

Combinando as duas últimas eqs, temos

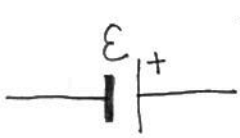
$$RI = \mathcal{E} - rI \Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

SÍMBOLOS USADOS EM CIRCUITOS

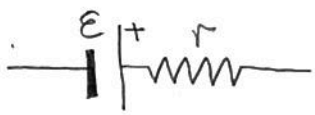
fio condutor com resistência desprezível



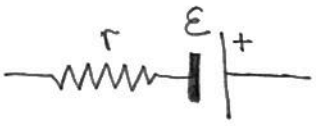
resistor.

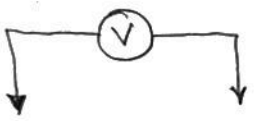


fonte de fem; a linha maior com o sinal + indica o terminal positivo da fonte



fonte de fem com resistência interna; a resistência pode ficar de qualquer lado





voltímetro; mede a ddp entre seus terminais; normalmente tem resistência muito grande



amperímetro; mede a corrente que passa através dele; um amperímetro ideal tem resistência desprezível.

POTÊNCIA

Vimos que a potência fornecida a um resistor é dada por

$$P_R = RI^2$$

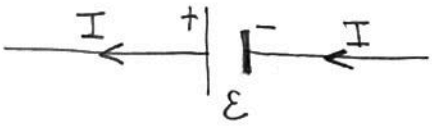
Esta potência é dissipada no efeito Joule.

O trabalho realizado pela fem sobre uma carga dq transportada de − para + é dado por

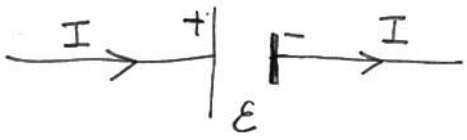
$$dW_\mathcal{E} = \mathcal{E}\, dq$$

de forma que a potência fornecida pela fem é

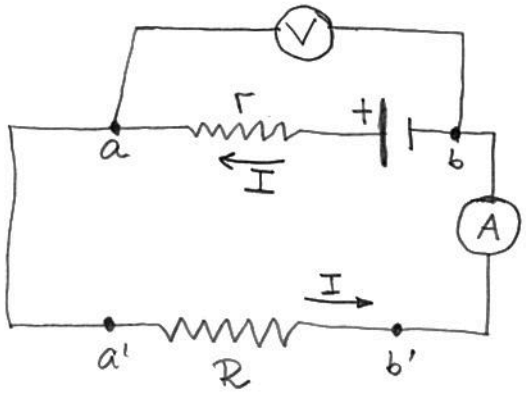
$$P_\varepsilon = \frac{dW_\varepsilon}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} = \varepsilon I$$



Quando a corrente atravessa a fem no sentido + para − a fem está absorvendo energia do circuito a uma taxa εI. Se a fonte for uma bateria, ela estará sendo carregada.



EXEMPLOS 25-6 e 25-9.



Dados: $r = 2\,\Omega$

$R = 4\,\Omega$

$\varepsilon = 12\,V$

Vamos supor $R_A = 0$

$R_V \to \infty$

de forma que $V_b = V_b'$ e nenhuma corrente passa pelo voltímetro.

* Leitura no amperímetro.

Como $V_a = V_a'$ e $V_b = V_b'$,

$$V_a - V_b = V_a' - V_b'$$

$$\Rightarrow \varepsilon - rI = RI$$

Portanto $I = \frac{\varepsilon}{r+R} = 2A$

* Leitura no voltímetro.

$$V_{ab} = V_a - V_b = \varepsilon - rI = 8V$$

* Potência fornecida pela fem.

$$P_\varepsilon = \varepsilon I = 24W$$

* Potência dissipada na resistência da fem

$$P_r = rI^2 = 8W$$

* Potência dissipada no resistor

$$P_R = RI^2 = 16W$$

Note que $P_\varepsilon = P_r + P_R$

Problemas: VELHO (NOVO)

2(2), 4(8), 7(17), 9(13), 17(27)
23(37), 24(36), 27(41), 28(40),
37(53), 38(54), 40(56), 43(57), 47(63),
48(64), 49(65), 57(75), 60(78), 63(83),
69(85).

ESTIMATIVA DE τ.

Conhecendo-se σ pode-se estimar τ através da relação

$$\tau = \frac{m\sigma}{n e^2}$$

Para o cobre

$$\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega.m$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1}{\rho} = 5{,}9 \times 10^{7}\ (\Omega.m)^{-1}$$

Fazendo as contas, obtemos

$$\tau = 2{,}5 \times 10^{-14} s$$

O livre caminho médio é definido como sendo a distância média percorrida entre 2 colisões. Assim

$$\ell = v\,\tau$$

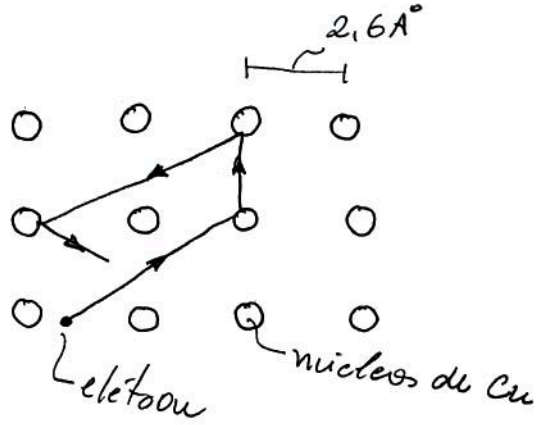
Considerando

$$v = 1{,}6 \times 10^{6}\ m/s$$

temos $\ell = 4 \times 10^{-8} m$

$= 400\ A^\circ$

A distância entre 2 átomos de Cu no cristal é de $2{,}6\ A^\circ$. O fato de ℓ ser muito maior que a distância entre os átomos do cristal só pode ser explicado pela Mecânica quântica.

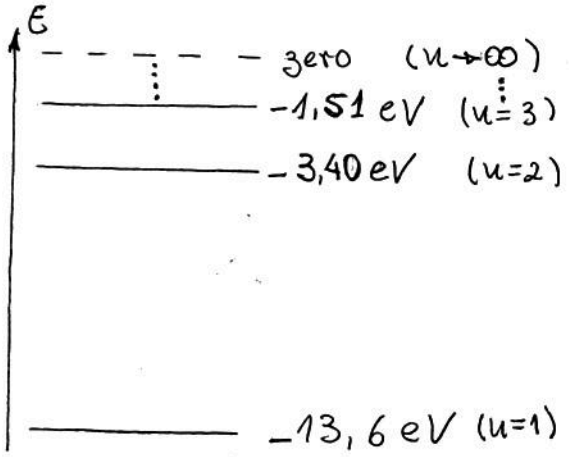


O modelo cinético ajuda-nos a entender porque ρ cresce quando T aumenta. Em temperaturas mais altas os átomos da rede vibram mais em torno de suas posições de equilíbrio. Assim aumentam as colisões e τ diminui. Portanto, σ diminui e ρ cresce!

A mecânica quântica prevê que os elétrons em um átomo, molécula, ou sólido, não podem ter qualquer energia. Somente alguns valores são permitidos e diz-se que a energia é quantizada. Por exemplo, no átomo de H só energias dadas por

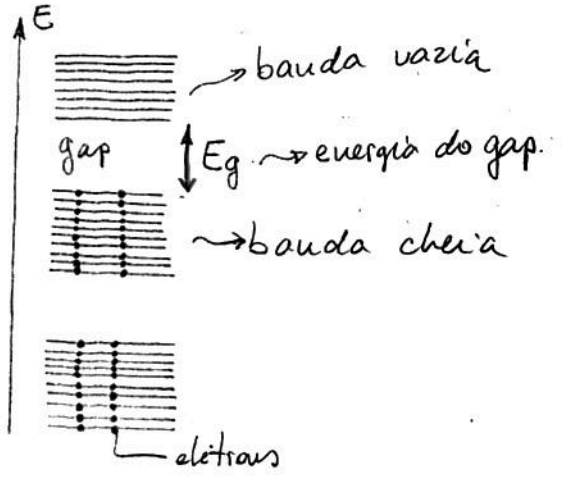
$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\ eV$$

onde $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$
são permitidos.



Num sólido, os níveis de energia formam grupos chamados bandas. Cada nível cabe 2 elétrons com spins diferentes. À temperatura $T=0$ os elétrons ocupam os níveis de energia mais baixos.

ISOLANTE



Em um isolante, em $T=0$, as bandas são totalmente vazias ou totalmente cheias. A uma temperatura T, um elétron tem uma probabilidade de se promover para a banda vazia, dada pelo fator de boltzmann

$$P \sim e^{-E_g/2kT}$$

(P: probabilidade; E_g: da ordem de)

Tipicamente $E_g \sim 5eV$. À temperatura ambiente, $T \sim 300K$, temos

$$\frac{E_g}{2kT} \sim 100$$

Assim

$$P \sim e^{-100} \sim 10^{-44} \sim \text{zero}$$

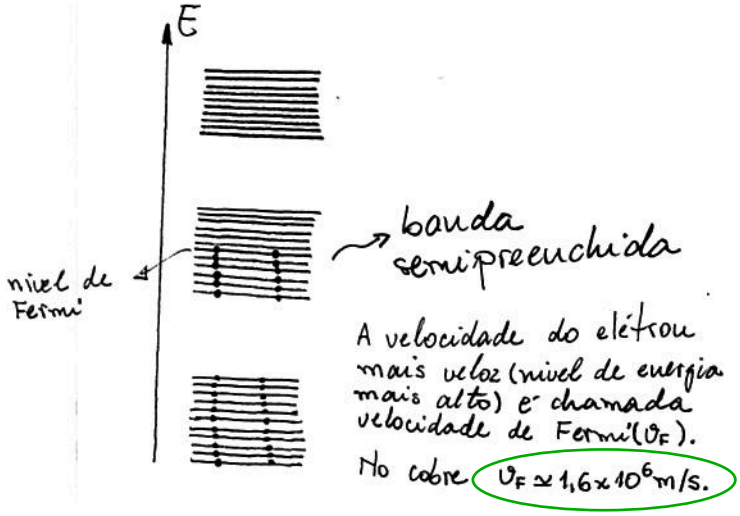
Então o elétron não pode "pular" para a banda vazia.

Quando um campo elétrico é aplicado, o elétron quer mudar sua velocidade mas para isto teria que mudar sua energia. Como todos os estados de energia da sua banda já estão ocupados, ele só pode mudar de energia se passar para a banda vazia, o que é extremamente improvável. Como o elétron não pode mudar de velocidade, não pode responder ao campo elétrico aplicado. Portanto, não há corrente, e por isto o material é isolante.

* GAP = região de energias proibidas

METAL

Num metal a última banda está parcialmente preenchida



Os elétrons dos níveis de energia mais altos "percebem" estados vazios próximos. Assim, eles podem mudar de velocidade em resposta a um campo elétrico aplicado. Portanto, pode haver condução.

SEMICONDUTOR

Num semicondutor intrínseco (puro) a situação é parecida com a de um isolante, mas $E_g \sim 0{,}5$ eV. Assim, para $T = 300$K

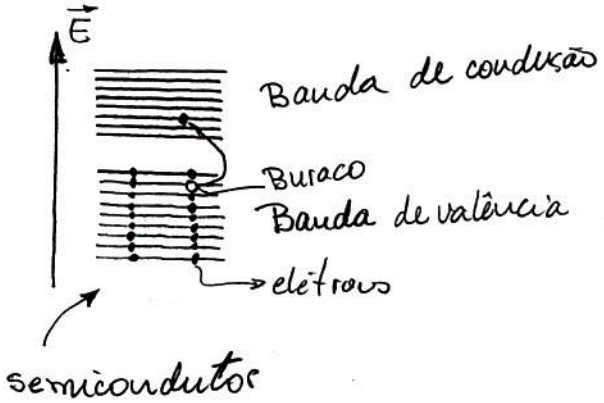
$$\frac{E_g}{2kT} \sim 10$$

O fator de Boltzmann é

$$e^{-E_g/2kT} \sim e^{-10} \sim 10^{-4}$$

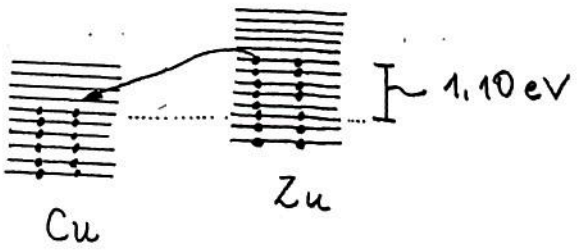
Como existem muitos elétrons no material, alguns podem "pular" para a banda vazia (chamada banda de condução). Lá existem estados desocupados e o elétron promovido pode responder ao campo elétrico. Portanto há condução, embora menor que nos metais. Além disso, cada elétron que passa para a banda vazia deixa um buraco (estado desocupado) na banda cheia (chamada banda de valência). Portanto, também há condução na banda de valência.

Quanto maior T, mais elétrons passam para a banda de condução. Portanto σ cresce quando T aumenta. Assim ρ decresce com T aumentando

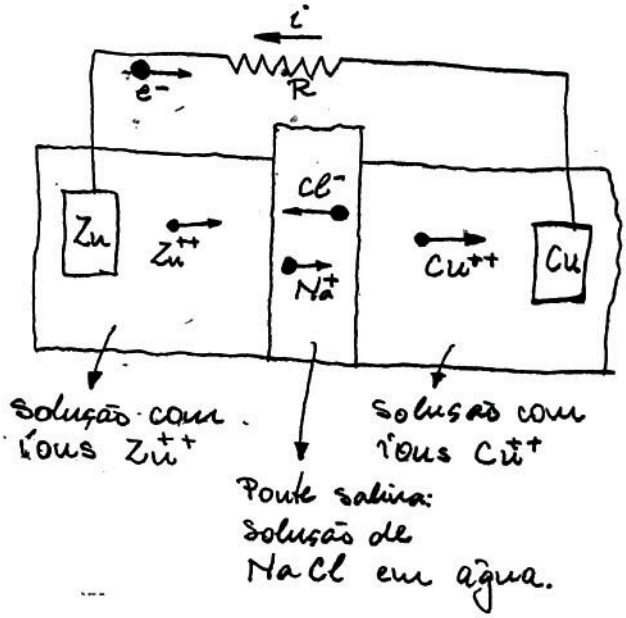


CÉLULA VOLTAICA

Os níveis de energia mais altos (nível de Fermi) em metais diferentes são diferentes. Exemplo:



Quando os metais são colocados em contato, elétrons passam do Zu para o Cu.



O processo:

(1) Elétrons passam do Zu para o Cu através do fio (resistor).

(2) Átomos de Zu na placa viram íons Zu^{++} que se deslocam para a direita.

para cada dois elétrons, um Zu^{++}

(3) Na solução de NaCl, íons Cl^- se movem para a esquerda e íons Na^+ para a direita, correspondendo a uma corrente para a direita.

(4) Na solução de íons Cu^{++}, os íons se movem para a direita.

(5) Os íons Cu^{++} aderem à placa de Cu e se unem aos elétrons que vieram pelo fio para se transformarem em átomos de Cu neutros. → dois elétrons para cada Cu^{++}

Durante o processo a placa de Zn vai se desgastando e a de cobre aumentando. A bateria deixa de funcionar quando acabar a placa de Zn ou os íons Cu^{++} na solução.

No caso do Zn e Cu a diferença de energia é de 1,10eV. Assim, cada elétron que circula fornece uma energia de 1,10 eV. Portanto a fem gerada é de 1,10V.

A 1ª célula foi construída por Alessandro Volta em 1800. Ele usou Ag e Cu. Para aumentar a fem, ele utilizou (empilhou) várias células em série, o que foi chamado de pilha voltaica ou bateria voltaica.

Nas pilhas secas as soluções são substituídas por eletrólitos sólidos.

No cap. 9 mostraremos como uma fem pode ser gerada por um campo magnético variável: indução eletromagnética.

A célula voltaica é discutida no livro do Alaor Chaves, no capítulo 23.

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PARES

26.2 (a) 87,5 mA; (b) 0,64 cm/h

26.4 (a) 10,56 mA (b) do eletrodo positivo para o negativo.

26.24 (a) 0,47 A, no sentido anti-horário (b) 15,25 V (c) 11,01 V

26.28 (b) não, o gráfico não é uma reta.

26.38 (a) 0,53 W; (b) 9530 J (c) $2r = 7,0\ \Omega$

26.40 (a) $1,5 \times 10^{-12}$ s

26.48 (b) $J = \frac{V_{ab}}{\rho(b-a)} \frac{ab}{r^2}$

26.58 (b) 44,55 Ω

26.60 (a) 237°C

(b) i) 162 W

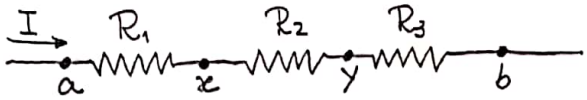
ii) 148 W

26.50 (a) $\frac{V}{\rho d}$ entre faces separadas por d.

(b) $\frac{6Vd}{\rho}$ entre as faces separadas por d.

6. CIRCUITOS DE CORRENTE CONTÍNUA

RESISTORES EM SÉRIE



$$V_{ax} = R_1 I, \quad V_{xy} = R_2 I, \quad V_{yb} = R_3 I$$

$$V_{ab} = V_{ax} + V_{xy} + V_{yb}$$

$$= (R_1 + R_2 + R_3) I$$

Define-se a resistência equivalente por meio da expressão

$$R_{eq} = V_{ab} / I$$

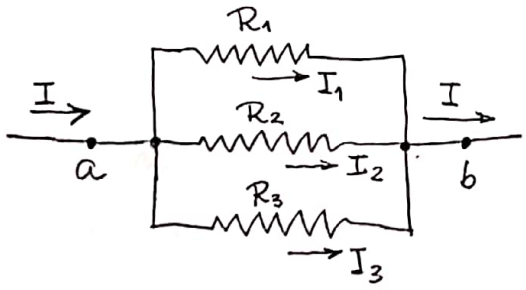
de forma que

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3$$

Note que

R_{eq} > qualquer uma das resistências

RESISTORES EM PARALELO



$$V_{ab} = R_1 I_1 \Rightarrow I_1 = V_{ab}/R_1$$

$$V_{ab} = R_2 I_2 \Rightarrow I_2 = V_{ab}/R_2$$

$$V_{ab} = R_3 I_3 \Rightarrow I_3 = V_{ab}/R_3$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = V_{ab}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$$

Comparando com

$$I = \frac{V_{ab}}{R_{eq}}$$

temos

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Note que

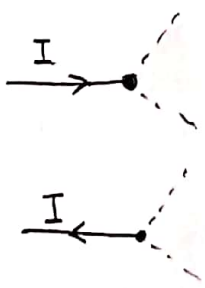
$$\frac{1}{R_{eq}} > \frac{1}{\text{qualquer uma das resistências}}$$

R_{eq} < qualquer uma das resistências

LEIS DE KIRCHHOFF

1) Lei dos nós: $\sum I = 0$

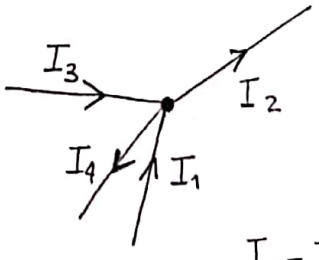
Convenção:



I positivo

I negativo

Exemplo.



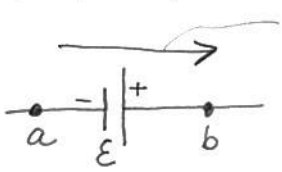
$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$$

Digitalizado com CamScanner

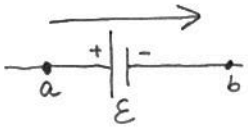
2) Lei das malhas: em uma malha

$$\sum \Delta V = 0$$

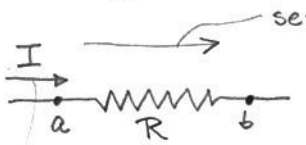
Convenção:



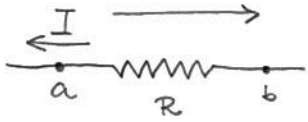
$\Delta V = V_b - V_a = +\mathcal{E}$



$\Delta V = V_b - V_a = -\mathcal{E}$

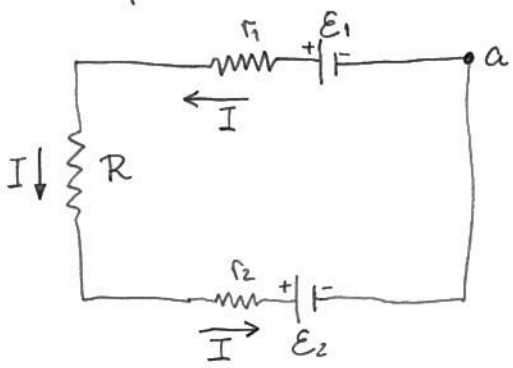


$\Delta V = V_b - V_a = -RI$



$\Delta V = V_b - V_a = +RI$

Exemplo.



Partindo do ponto a e circulando no sentido anti-horário temos

$$\mathcal{E}_1 - r_1 I - RI - r_2 I - \mathcal{E}_2 = 0$$

Ex. 26-6. Calcular as correntes em todos os ramos do circuito da figura ao lado.

Nós:

$a \rightarrow I_1 - I_3 - I_4 = 0 \quad (1)$

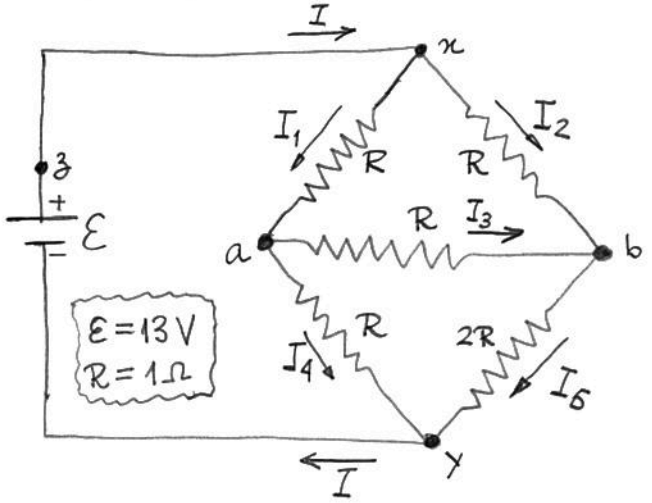
$b \rightarrow I_2 + I_3 - I_5 = 0 \quad (2)$

$x \rightarrow I - I_1 - I_2 = 0 \quad (3)$

$y \rightarrow I_4 + I_5 - I = 0$

A última eq. (não enumerada) pode ser obtida somando-se as 3 primeiras. Em geral o número de eqs. independentes provenientes da lei dos nós é dado por

nº eqs indep (nós) = nº nós − 1



Malhas:

$axzya \rightarrow RI_1 - \mathcal{E} + RI_4 = 0 \quad (4)$

$ayba \rightarrow -RI_4 + 2RI_5 + RI_3 = 0 \quad (5)$

$abxa \rightarrow -RI_3 + RI_2 - RI_1 = 0 \quad (6)$

$ybxzy \rightarrow 2RI_5 + RI_2 - \mathcal{E} = 0$

A última eq. (não enumerada) pode ser obtida somando-se as eqs. (4), (5) e (6). Outra eq. de malha possível seria

$aybxa \rightarrow -RI_4 + 2RI_5 + RI_2 - RI_1 = 0$

mas esta eq. pode ser obtida somando-se as eqs. (5) e (6).

Temos um sistema com 6 eqs. LI e 6 variáveis (I, I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5). Como a eq. (3) é a única que envolve I podemos resolver as outras 5 e depois voltar nela.

Isolando I_4 e I_5 de (1) e (2) temos

$$I_4 = I_1 - I_3 \qquad (7)$$

$$I_5 = I_2 + I_3 \qquad (8)$$

Substituindo (7) e (8) em (4) e (5) temos

$$2RI_1 - RI_3 = \mathcal{E} \qquad (9)$$

$$-I_1 + 2I_2 + 4I_3 = 0 \qquad (10)$$

Isolando I_2 de (6) temos

$$I_2 = I_1 + I_3 \qquad (11)$$

Subst. (11) em (10) temos

$$I_1 = -6I_3 \qquad (12)$$

Subst. (12) em (9) temos

$$I_3 = -\mathcal{E}/13R$$

Subst. os valores numéricos temos

$$I_3 = -1A$$

Subst I_3 em (12) temos

$$I_1 = 6A$$

subst I_1 e I_3 em (11) temos

$$I_2 = 5A$$

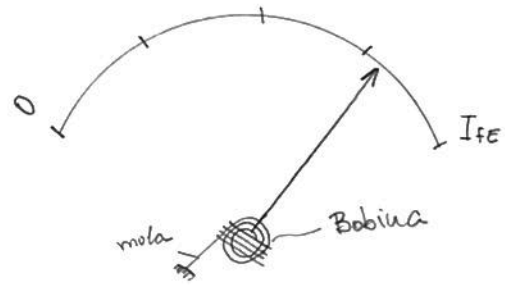
Subst I_1, I_2 e I_3 em (7), (8) e (3) temos

$$I_4 = 7A, \quad I_5 = 4A \quad \text{e} \quad I = 11A$$

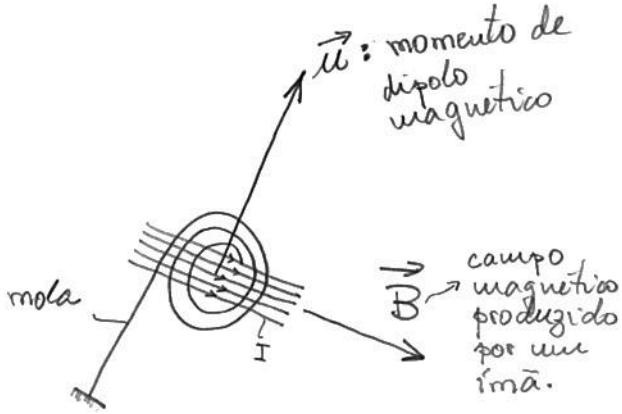
A resistência equivalente é dada por

$$R_{eq} = \mathcal{E}/I = 1{,}2\,\Omega$$

GALVANÔMETRO



I_{fE} → corrente de fundo de escala: valor máximo da corrente que pode ser medida



$$\vec{\tau}_{mag} = \vec{\mu} \times \vec{B} \qquad \text{(cap. 28)}$$

$$\tau_{mag} = \mu B \quad (\vec{\mu} \perp \vec{B})$$

Supondo que a mola obedece à lei de Hooke para rotação

$$\tau_{mec} = k\theta$$

O equilíbrio é atingido quando $\tau_{mec} = \tau_{mag}$, ou seja,

$$k\theta = \mu B$$

No cap. 28 vamos mostrar que $\mu \propto I$, de forma que

$$\theta \propto I \longrightarrow \begin{cases} \theta = 0 \text{ corresponde à} \\ \text{posição de equilíbrio} \\ \text{da mola} \end{cases}$$

A ddp medida é dada por

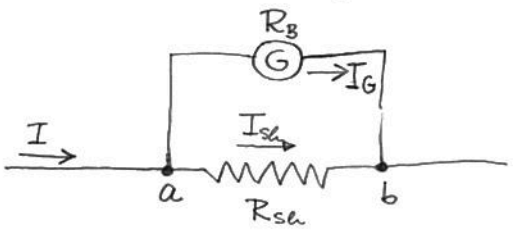
$$V = R_B I$$

onde R_B é a resistência da bobina.

AMPERÍMETRO

Para ser usado como amperímetro é desejável que a resistência do galvanômetro seja muito pequena.

Para construir um amperímetro com corrente de fundo de escala I_a a partir de um galvanômetro com I_{fE} ($I_a > I_{fE}$) podemos conectar um resistor R_{sh}, chamado resistor de shunt, em paralelo com o galvanômetro.



$$V_{ab} = R_B I_G = R_{sh} I_{sh}$$

Se $I_G = I_{fE}$, devemos ter $I = I_a$. Assim $I_{sh} = I_a - I_{fE}$.

Portanto

$$R_B I_{fE} = R_{sh}(I_a - I_{fE})$$

$$R_{sh} = R_B \frac{I_{fE}}{I_a - I_{fE}}$$

Ex. 26.8 $I_{fE} = 1{,}00\ mA$
$R_B = 20{,}0\ \Omega$
$I_a = 50{,}0\ mA$
R_{sh} ?

Sol.

$$R_{sh} = 20{,}0\,\Omega \frac{1{,}00\,mA}{50{,}0\,mA - 1{,}00\,mA}$$

$$R_{sh} = 0{,}408\ \Omega$$

A resistência equivalente é dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_{sh}} = \frac{1}{20{,}0\,\Omega} + \frac{1}{0{,}408\,\Omega}$$

$$R_{eq} = 0{,}400\,\Omega$$

Veja que $R_{eq} \ll R_B$

VOLTÍMETRO

É desejável que um voltímetro tenha uma resistência muito grande.

Pode-se construir um voltímetro com ddp de fundo de escala V_V a partir de

de um galvanômetro com corrente de fundo de escala I_{fE} conectando ao galvanômetro um resistor em série R_S.



$$V_{ab} = (R_S + R_B)\, I$$

Quando $I = I_{fE}$, $V_{ab} = V_V$, de forma que

$$V_V = (R_S + R_B)\, I_{fE}$$

$$\Rightarrow R_S = \frac{V_V}{I_{fE}} - R_B$$

Ex. 26.9 $I_{fE} = 1{,}00\ mA$
$R_B = 20{,}0\ \Omega$
$V_V = 10{,}0\ V$
R_S ?

Sol.

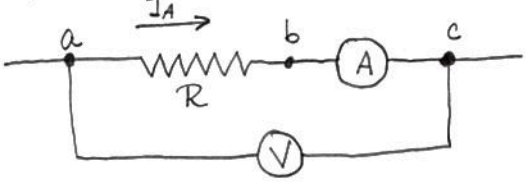
$$R_S = \frac{10{,}0\ V}{1{,}00\ mA} - 20{,}0\ \Omega = 9980\ \Omega$$

$$R_{eq} = R_S + R_B = 10\,000\ \Omega$$

Note que $R_{eq} >> R_B$

MEDIDA DE RESISTÊNCIA

1)



A resistência R é dada por

$$R = \frac{V_{ab}}{I_A}$$

Mas o voltímetro mede V_{ac} e não V_{ab}, de forma que a resistência medida é

$$R_{med} = \frac{V_{ac}}{I_A}$$

como

$$V_{ac} = (R + R_A)\, I_A,$$

$$R_{med} = R + R_A$$

O erro cometido na medida é dado por

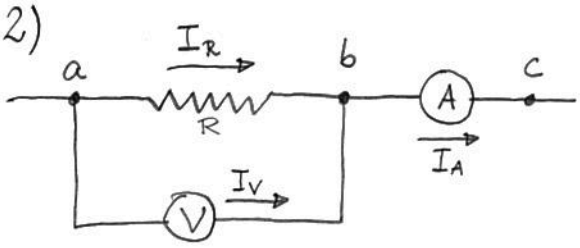
$$\delta R = R_{med} - R = R_A$$

e o erro relativo é dado por

$$\frac{\delta R}{R} = \frac{R_A}{R}$$

Assim é desejável ter $R_A << R$.

2)



$$R = \frac{V_{ab}}{I_R}$$

Mas o amperímetro mede I_A e não I_R, de forma que

$$R_{med} = \frac{V_{ab}}{I_A}$$

Mas $I_A = I_V + I_R$

e como

$$R_V I_V = R I_R \Rightarrow I_V = \frac{R}{R_V} I_R$$

$$\Rightarrow I_A = \left(1 + \frac{R}{R_V}\right) I_R$$

Assim

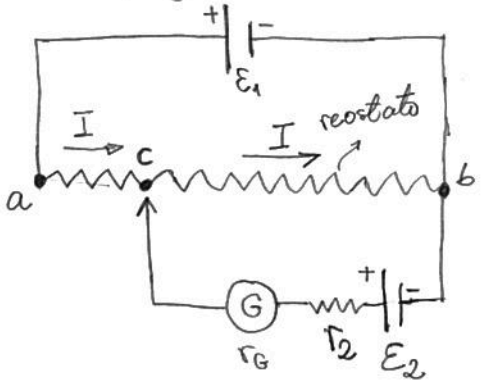
$$R_{med} = \frac{V_{ab}}{\left(1 + \frac{R}{R_V}\right) I_R} = \frac{R}{1 + \frac{R}{R_V}}$$

Agora para que o erro na medida seja pequeno é desejável que $R_V >> R$, de forma que

$$R_{med} \simeq R.$$

POTENCIÔMETRO

serve para medir uma fem desconhecida $\mathcal{E}_2$ (com resistência desprezível).



O ponto de contato c é variado até o galvanômetro marcar corrente nula. Assim

$$\mathcal{E}_1 = R_{ab} I$$

$$\mathcal{E}_2 = R_{bc} I$$

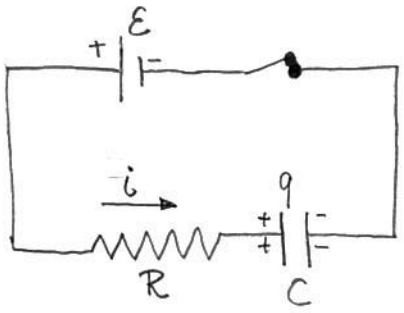
$$\frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{R_{bc}}{R_{ab}}$$

Se o reostato for uniforme

$$\frac{R_{bc}}{R_{ab}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} \rightarrow \text{distância entre os pontos b e c}$$

Note que, como a corrente no galvanômetro é nula, o resultado da medida não depende de r_G nem de r_2.

CIRCUITO RC: CARREGANDO O CAPACITOR



Vamos supor que em um dado momento durante a carga do capacitor a corrente seja i e a carga no capacitor seja q.

Vamos supor que a chave seja fechada em $t = 0$.

Partindo da chave e circulando no sentido anti-horário, a lei das malhas nos leva à equação

$$\mathcal{E} - Ri - \underbrace{\frac{q}{C}}_{\hookrightarrow \text{ddp no capacitor}} = 0$$

A carga e a corrente estão relacionadas por

$$i = \frac{dq}{dt}$$

de forma que

$$\mathcal{E} - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}(q - \mathcal{E}C)$$

Separando o que depende de q de um lado e o que depende de t do outro

$$\frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrando

$$\int_0^q \frac{dq}{q - \mathcal{E}C} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

(q: carga no instante t; 0: veja que $q=0$ em $t=0$; t: instante em que a chave é fechada)

$$\ln(q - \mathcal{E}C)\Big|_0^q = -\frac{t}{RC}\Big|_0^t$$

$$\ln\left(\frac{q - \mathcal{E}C}{-\mathcal{E}C}\right) = -\frac{t}{RC}$$

Aplicando a exponencial de ambos os lados

$$\frac{\mathcal{E}C - q}{\mathcal{E}C} = e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

Note que:

$t = 0 \Rightarrow q = 0$

$t \to \infty \Rightarrow q \to \mathcal{E}C$ (carga final)

A corrente é dada por

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}$$

Note que:

$t = 0 \Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$t \to \infty \Rightarrow i \to 0$

CONSTANTE DE TEMPO

A constante

$$\tau = RC$$

tem dimensão de tempo. Em termos de τ,

$$q(t) = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau}$$

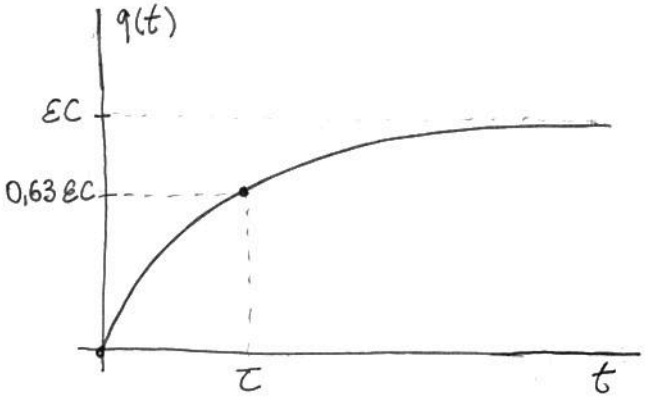
Para $t = \tau$:

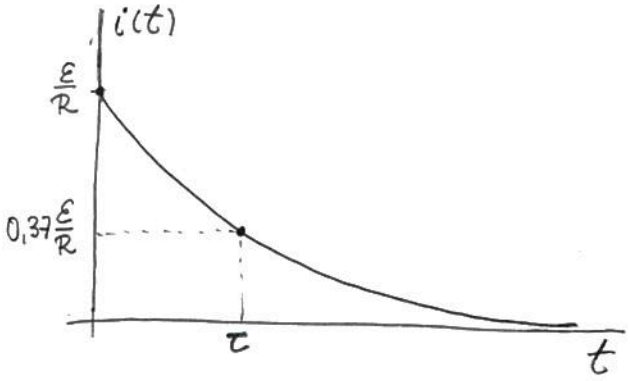
$$q = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-1}\right) \simeq 0{,}63\,\mathcal{E}C$$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-1} \simeq 0{,}37\frac{\mathcal{E}}{R}$$

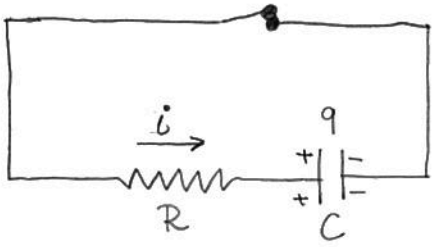
Análise dimensional:

$$[\tau] = [R]\cdot[C] = \frac{[V]}{[i]}\cdot\frac{[Q]}{[V]} = [t]$$





DESCARREGANDO O CAPACITOR



A lei das malhas leva a

$$-Ri - \frac{q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

$$\int_{Q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$

Q_0 → carga no instante $t=0$

Vamos supor $t=0$ no instante em que a chave é fechada.

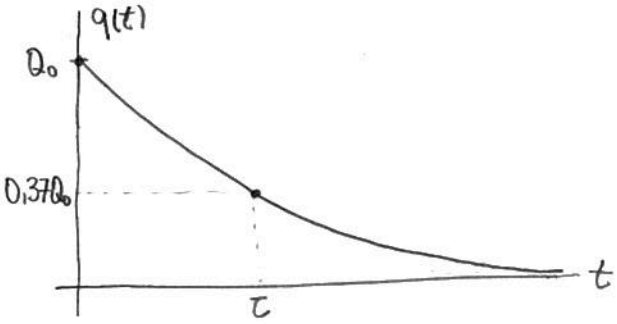
$$\ln\frac{q}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

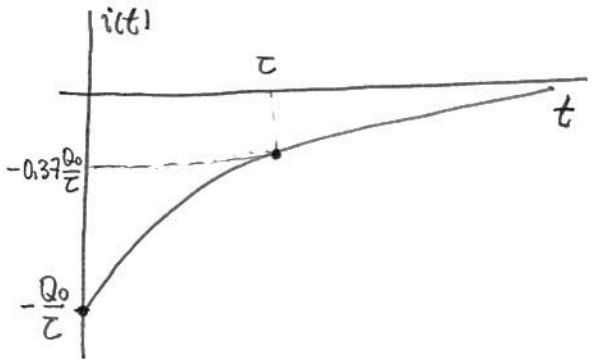
$$\frac{q}{Q_0} = e^{-t/RC}$$

$$q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \equiv Q_0 e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \equiv -\frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

sentido contrário ao da figura.





Obs. Na sua figura desenhe a corrente chegando na placa + do capacitor para que $i = dq/dt$. se a corrente chegar na placa − você terá $i = -dq/dt$.

Problemas: VELHO (NOVO)

7(12), 10(16), 11(17), 12(18), 13(21), 15(23), 16(24), 22(31), 27(36), 28(37), 34(48), 45(61), 49(65), 54(75), 55(76), 59(79), 67(85), 69(87), 70(88).

RESPOSTAS DOS PROBLEMAS PARES

27.8 (a) $R_{eq} = 4,49\ \Omega$

(b) $I_1 = 1,34\ A$, $I_2 = 0,16\ A$

$I_3 = 0,87\ A$, $I_4 = 0,29\ A$

27.16 (a) Em cima, $I = 0,800\ A$, para a esquerda; no meio, $I = 0,200\ A$ para a direita; em baixo, $I = 0,600\ A$ para a direita.

(b) $V_{ab} = -3,20\ V$

27.22 (a) $R_{sa} = 0,641\ \Omega$

(b) $R_s = 0,975\ \Omega$

27.28 (a) $R = 543\ \Omega$

(b) $I = 1,88\ mA$

(c) $1824\ \Omega$, $608\ \Omega$

$203\ \Omega$

27.34 (a) $165\ \mu C$

(b) $463\ \Omega$

(c) $12,6\ ms$

27.44 (a) $R_{eq} = 8,0\ \Omega$

(b) $V_{ax} = -57,6\ V$

27.54 $R_1 = 0,12\ \Omega$

$R_2 = 1,08\ \Omega$

$R_3 = 10,8\ \Omega$

27.68 (a) $\tau = 12,0\ \mu s$

(b) $5,06\ V$

27. CAMPO MAGNÉTICO E FORÇA MAGNÉTICA

O magnetismo de ímãs é um fenômeno conhecido desde a antiguidade. Na Grécia antiga já se sabia que a magnetita (um minério de ferro) atrai objetos de ferro. Os chineses também conheciam a bússula em 1100 a.C. (uma agulha imantada orienta-se na direção sul-norte da Terra).

Sabe-se que um imã tem dois polos que são chamados de polo norte e polo sul. Polos iguais se repelem e polos diferentes se atraem. Uma analogia com a eletricidade sugere pensarmos em um imã formado de cargas magnéticas norte e sul mas isto implica em um sério problema: não é possível separar os polos de um imã. Ao ser partido, um ímã sempre se transforma em dois ímãs, cada um com polos norte e sul. O fato é que não existem cargas magnéticas e a unidade básica do magnetismo é o dipolo magnético.

Em 1820 o dinamarquês H.C. Oersted descobriu que uma corrente elétrica produz um campo magnético. A partir daí o campo magnético passou a ser associado com cargas em movimento.

DEFINIÇÃO DE CAMPO MAGNÉTICO

Um dipolo elétrico tende a alinhar-se com um campo elétrico. Em analogia, define-se a direção de um campo magnético como sendo aquela da agulha de uma bússula (um dipolo magnético) colocada no campo. O sentido do campo ($\vec{B}$) é definido como sendo o sentido sul-norte da agulha.

FORÇA SOBRE UMA CARGA

Verifica-se experimentalmente que um campo magnético exerce força sobre cargas em movimento e que:

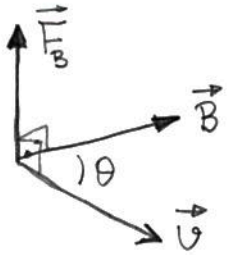
(1) Se a partícula estiver se movendo na direção do campo, a força magnética sobre ela é zero.

2) O módulo da força é proporcional ao módulo da carga da partícula.

3) O módulo da força é proporcional ao módulo da velocidade da partícula.

4) A direção da força é sempre perpendicular ao plano formado por $\vec{F}$ e $\vec{B}$.

Digitalizado com CamScanner



5) O módulo da força é proporcional a $\operatorname{sen}\theta$, sendo θ o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$.

6) (se a carga for positiva,) o sentido da força é o do produto vetorial de $\vec{v}$ por $\vec{B}$ (dado pela regra da mão direita)

Todas estas conclusões podem ser resumidas usando a expressão

$$\vec{F}_B = kq\,\vec{v}\times\vec{B}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. No SI escolhe-se $k=1$, de forma que

$$\vec{F}_B = q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

Esta expressão pode ser interpretada como sendo a definição de $\vec{B}$.

A unidade de B no SI é o

$$\frac{N}{C\cdot m/s} = \frac{N}{A\cdot m} \equiv T\,(tesla)$$

Outra unidade muito usada é o gauss:

$$1G\,(gauss) = 10^{-4}\,T\,(tesla)$$

CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA

A Terra se comporta como um gigantesco imã que produz um campo magnético não uniforme em sua vizinhança. A intensidade deste campo na superfície da Terra é da ordem de $1G = 10^{-4}\,T$.

FORÇA DE LORENTZ

Se existirem um campo elétrico e um campo magnético atuando simultaneamente sobre uma carga, a força sobre ela é dada por

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

Esta expressão é conhecida como força de Lorentz.

TRABALHO E POTÊNCIA

O trabalho realizado pela força de Lorentz quando uma carga q sofre um deslocamento infinitesimal $d\vec{l}$ é dado por

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$= q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot \vec{v}\,dt$$

Como $\vec{v}\times\vec{B}$ é perpendicular a $\vec{v}$,

$$(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}=0$$

de forma que

$$dW = q\vec{E}\cdot\vec{v}\,dt$$

A potência fornecida é

$$P=\frac{dW}{dt} = q\vec{E}\cdot\vec{v}$$

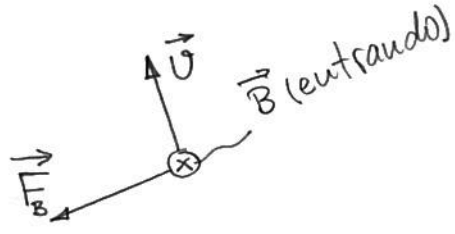
Resumindo: como a força magnética é sempre perpendicular ao deslocamento, ela não realiza trabalho sobre a carga; só a força elétrica realiza trabalho.

MOVIMENTO EM UM CAMPO MAGNÉTICO UNIFORME

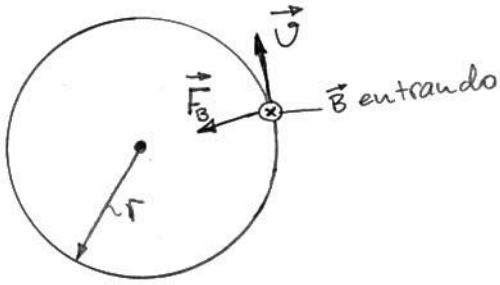
1) $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{B}$

Considere uma partícula de carga q (suposta positiva) movendo-se no plano da página em um campo magnético $\vec{B}$ apontando para dentro dela.

A força magnética sobre a partícula é dada por $\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$, e portanto é perpendicular ao campo e à velocidade.



Como $\vec{B}$ não realiza trabalho, a energia cinética da partícula não varia, e portanto v é constante. Se $\vec{F}_B$ é perpendicular a $\vec{v}$ (vetor) e v (módulo) é constante, então a partícula executa um movimento circular uniforme.



Em módulo,

$$F_B = qvB$$

Esta força é dirigida para o centro da circunferência e faz o papel de força centrípeta. Assim

$$qvB = m\frac{v^2}{r},$$

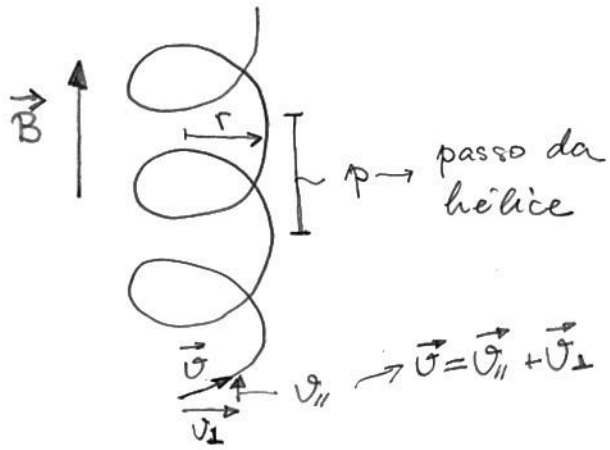
$$r=\frac{mv}{qB} \quad \text{ou} \quad v=\frac{qBr}{m}$$

se q for negativa, a trajetória da partícula terá sentido contrário ao da figura acima.

2) $\vec{v}$ com componente na direção de $\vec{B}$

Suponha que $\vec{v}$ tenha uma componente $\vec{v}_{\parallel}$ na direção de $\vec{B}$ e outra componente $\vec{v}_{\perp}$ no plano

perpendicular a $\vec{B}$. A componente $\vec{v}_{\parallel}$ não produz força magnética e a partícula tem movimento em forma de hélice: movimento circular no plano perpendicular a $\vec{B}$ e movimento uniforme na direção de $\vec{B}$.



O raio da órbita é dado por

$$r = \frac{m v_{\perp}}{qB}$$

O passo da hélice é dado por

$$p = v_{\parallel} T$$

onde T é o período do movimento circular.
A velocidade angular é dada por

$$\omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{qBr/m}{r} = \frac{qB}{m}$$

e a frequência é

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m}$$

Consequentemente o período é dado por

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi m}{qB}$$

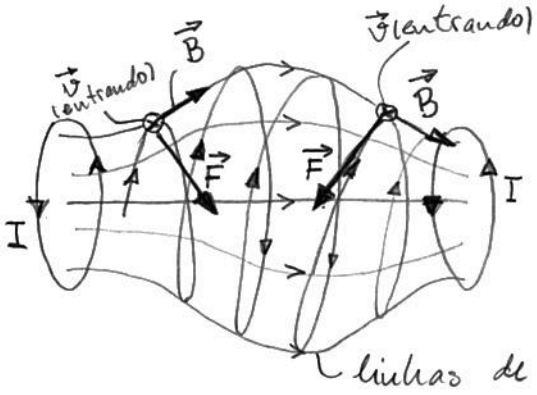
e o passo da hélice é

$$p = \frac{2\pi m v_{\parallel}}{qB}$$

Note que ω, f e T não dependem de v nem de r.

GARRAFA MAGNÉTICA

Considere uma partícula carregada se movendo no campo magnético produzido por duas espiras de corrente. Agora $\vec{B}$ não é uniforme mas tem a forma mostrada abaixo.

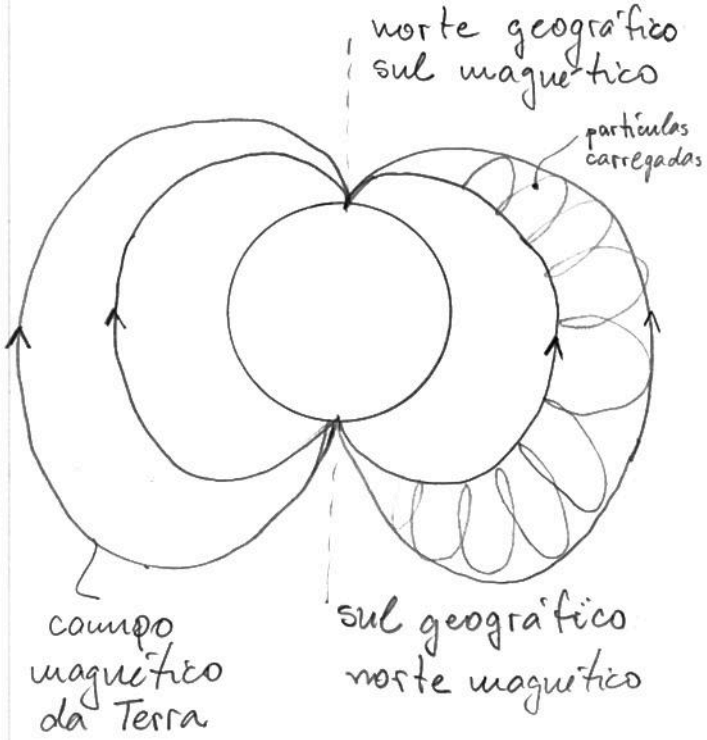


Note que $\vec{F}$ tem uma componente (vertical na figura) que é responsável pela aceleração centrípeta da partícula e outra componente (horizontal) que aponta para a região central. Se a componente horizontal da velocidade inicial não for muito

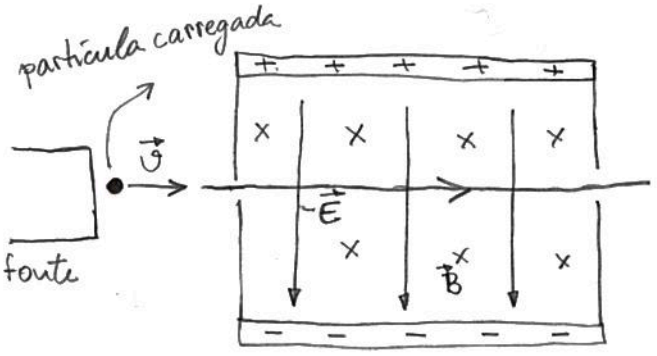
grande a partícula executa um movimento oscilatório na horizontal e fica presa na "garrafa magnética". Se a componente horizontal da velocidade inicial for muito grande a partícula pode escapar da "armadilha"

CINTURÕES DE VAN ALLEN

Partículas carregadas provenientes do sol podem ficar presas no campo magnético da Terra.

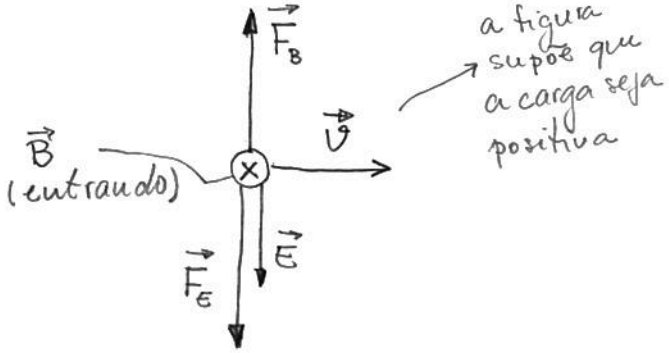


SELETOR DE VELOCIDADES



Para que a partícula se mova horizontalmente (sem sofrer desvio) devemos ter

$$\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0$$



Em módulo

$$qE = qvB \Rightarrow v = \frac{E}{B}$$

Só as partículas com $v = E/B$ se deslocam sem deflexão.

Note que o resultado obtido não depende do sinal da carga. Se q for negativa, os sentidos de ambas as forças se invertem, de forma que $\vec{F}_E + \vec{F}_B = 0$.

ESPECTRÔMETRO DE MASSA

Pode ser usado para medir massas de íons.

O campo magnético $\vec{B}'$ faz com que os íons descrevam movimento circular de raio

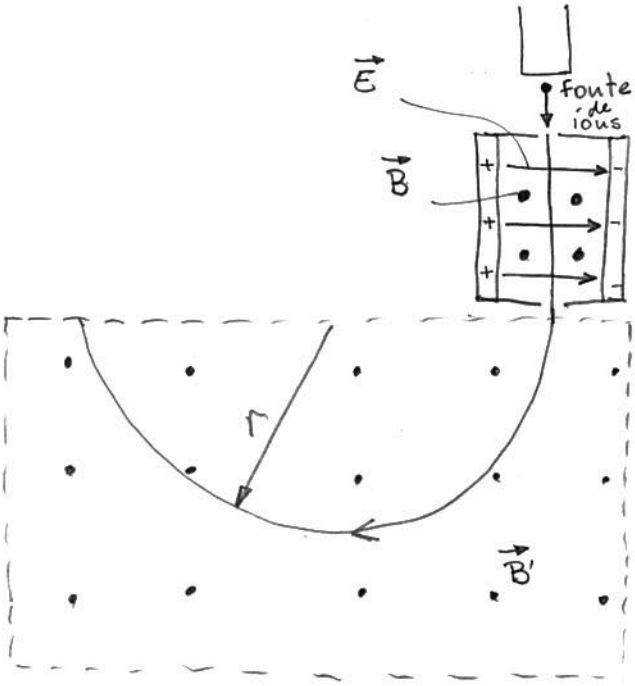
$$r = \frac{mv}{qB'}$$

Como somente íons com velocidade

$$v = E/B$$

passam sem desvio pelo seletor de velocidades,

$$r = \frac{mE}{qBB'} \quad \text{ou} \quad m = \frac{qBB'r}{E}$$

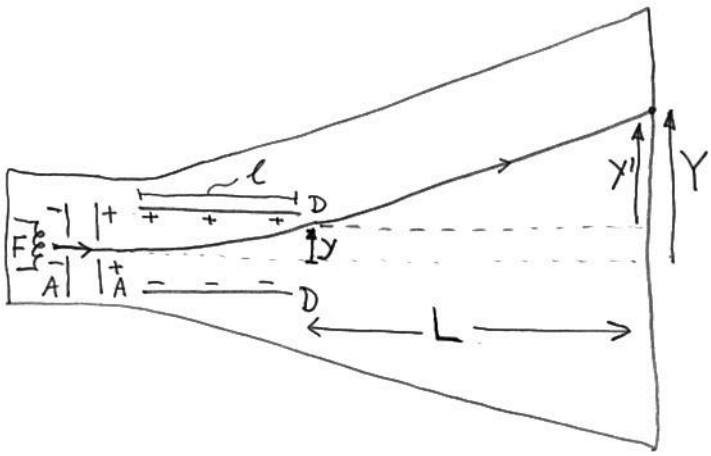


A DESCOBERTA DO ELÉTRON

Vamos mostrar a seguir uma versão simplificada do experimento realizado por Thomson em 1897 onde ele determinou a razão e/m para o elétron.

Elétrons são emitidos pelo filamento aquecido F.

O acelerador AA acelera os elétrons por meio de uma ddp entre suas placas: os elétrons adquirem uma velocidade horizontal v_0.



Na região entre as placas defletoras DD há um campo elétrico $\vec{E}$ para baixo que desvia os elétrons para cima. A aceleração vertical do elétron é

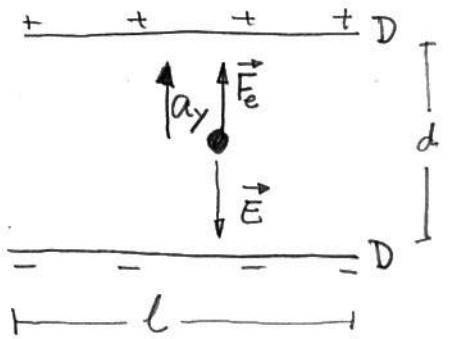
$$a_y = \frac{eE}{m}$$

Se a distância entre as placas for d e a ddp for V,

$$E = V/d$$

de forma que

$$a_y = \frac{eV}{md}$$



O elétron sofre um desvio vertical dado por

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2$$

onde $t = \ell / v_0$ é o tempo que o elétron permanece entre as placas DD. Assim

$$y = \frac{eV\ell^2}{2md v_0^2}$$

Os elétrons deixam a região entre as placas com uma componente vertical de velocidade

$$v_y = a_y t = \frac{eV\ell}{mdv_0}$$

Até chegarem ao anteparo fluorescente no extremo direito do aparelho os elétrons sofrem mais um desvio vertical dado por

$$y' = v_y T$$

onde $T = L / v_0$ é o tempo que levam até chegar ao anteparo. Assim

$$y' = \frac{eV\ell L}{mdv_0^2}$$

O desvio total dos elétrons é

$$Y = y + y' = \frac{eV\ell}{mdv_0^2}\left(L + \frac{\ell}{2}\right)$$

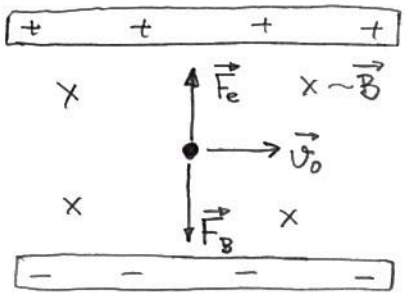
Normalmente $L \gg \ell$, de forma que $Y \simeq y'$.

Para calcular v_0 aplica-se um campo magnético entre as placas DD que é ajustado para que os elétrons caminhem em linha reta. Assim

$$v_0 = \frac{E}{B} = \frac{V}{Bd}$$

de forma que

$$Y = \frac{eB^2 d\ell}{mV}\left(L + \frac{\ell}{2}\right)$$



A razão entre a carga e a massa do elétron pode ser escrita como

$$\frac{e}{m} = \frac{YV}{B^2 d\ell\left(L + \frac{\ell}{2}\right)}$$

Admitindo que $L \gg \ell$, temos

$$\frac{e}{m} \simeq \frac{YV}{d\ell L B^2}$$

As grandezas que aparecem do lado direito podem ser medidas, de forma que e/m pode ser calculado.

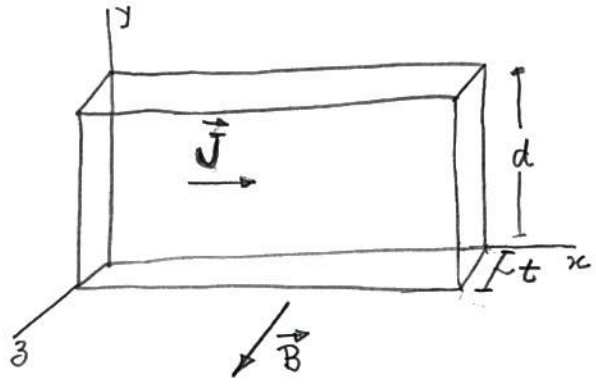
A experiência acima foi realizada por J. J. Thompson em 1897. Naquela época acreditava-se que a eletricidade

era transportada por um fluido. Thomson foi o primeiro a propor que os portadores de corrente eram partículas, que mais tarde foram chamadas de elétrons.

Em 1910 a carga do elétron foi medida por R. Millikan, o que permitiu calcular a sua massa.

O EFEITO HALL

Considere uma tira condutora com largura d e espessura t transportando uma corrente cuja densidade de corrente é $\vec{J}$.



Vamos supor $\vec{J} = J\hat{i}$ e $\vec{B} = B\hat{k}$.

A força média sobre um portador de carga q é

$$\vec{F}_B = q\,\vec{v}_d \times \vec{B}$$

onde $\vec{v}_d$ é a velocidade de deslocamento (ou de arraste)

Como

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d \Rightarrow \vec{v}_d = \frac{\vec{J}}{nq}$$

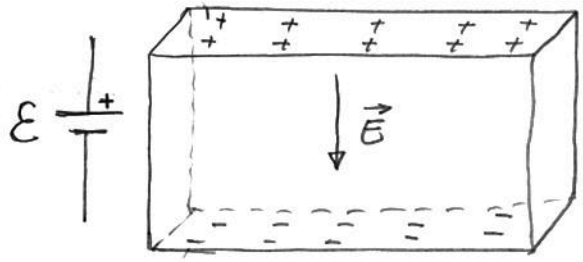
$$\vec{F}_B = \frac{\vec{J}\times\vec{B}}{n} = -\frac{JB}{n}\hat{j}$$

Então a força sobre os portadores é para baixo, independente do sinal de q.

Se q for negativo, haverá um fluxo de cargas negativas para baixo. Cargas negativas se acumulam na face inferior da placa e cargas positivas na face superior. O fluxo de cargas será interrompido quando surgir um campo elétrico para baixo (força elétrica para cima) que anula a força magnética (para baixo). Em módulo

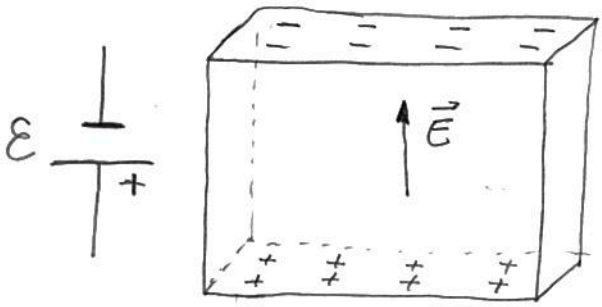
$$qE = qv_dB \Rightarrow E = v_dB$$

Haverá uma ddp entre as faces da placa com terminal + em cima e − em baixo. Esta ddp é chamada voltagem Hall ou fem Hall.



Se os portadores forem positivos haverá um acúmulo de

cargas positivas em baixo e a ddp terá o sentido invertido



Em 1879 E.H. Hall usou este experimento para mostrar que em um metal os portadores têm carga negativa.

Em módulo, a ddp (ou fem Hall) é dada por

$$\mathcal{E} = E d = v_d B d = \frac{JBd}{n|q|}$$

se a fita for arrastada com velocidade v_d no sentido oposto ao da velocidade dos portadores, estes terão velocidade zero em relação ao campo magnético, de forma que a fem Hall será nula. Pode-se usar este experimento para medir diretamente a velocidade de arraste.

Exemplo: fita de cobre ($n = 8{,}5 \times 10^{28}$ eletrons $/m^3$), $d = 1\,cm$, $t = 0{,}1\,mm$ e $I = 10\,A$, $B = 1{,}0\,T$. Calcular $\mathcal{E}$.

solução: $J = \frac{I}{td}$

$$\mathcal{E} = \frac{IB}{nqt}$$

Fazendo as contas, temos

$$\mathcal{E} = 7{,}4\,\mu V$$

que é uma fem muito pequena; mas que pode ser medida.

O FLUXO DE $\vec{B}$

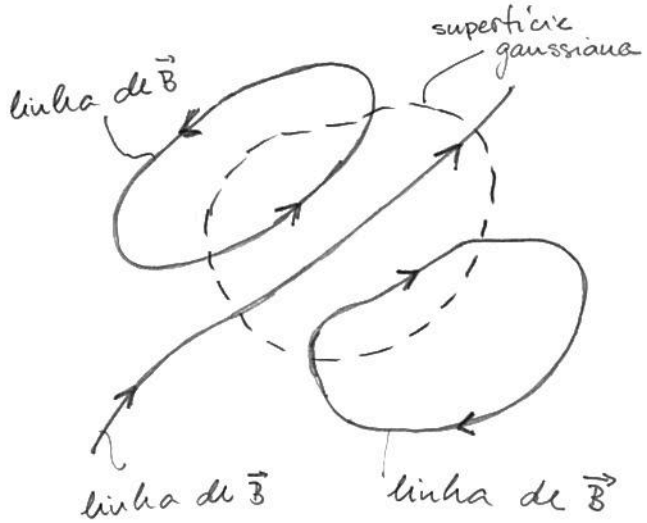
O fluxo de $\vec{B}$ através de uma superfície qualquer é

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Como não existem cargas (monopolos) magnéticas, o análogo da Lei de Gauss no magnetismo é

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

Esta é uma das equações básicas do eletromagnetismo. Dela podemos concluir que as linhas de $\vec{B}$ ou são fechadas ou começam e terminam no infinito.



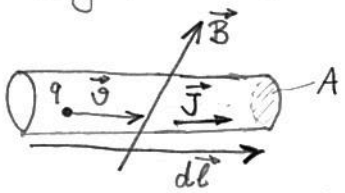
Note que, na figura, toda linha de $\vec{B}$ que entra por um lado sai pelo outro, de forma que $\Phi_B = 0$.

A unidade de Φ_B no SI é chamada weber (Wb):

$$Wb = T \cdot m^2$$

FORÇA MAGNÉTICA SOBRE UM CONDUTOR.

Considere um elemento de fio de comprimento dl transportando uma corrente I em um campo magnético $\vec{B}$



A força sobre um portador de carga q é

$$\vec{F}_q = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Assim, a força sobre o elemento de fio, que possui $nAdl$ portadores, é

$$d\vec{F} = nAdl\, q\, \vec{v}_d \times \vec{B}$$

onde $\vec{v}_d$ é a velocidade média dos portadores (velocidade de arraste). Como

$$\vec{J} = nq\vec{v}_d$$

podemos escrever

$$d\vec{F} = A\,dl\,\vec{J} \times \vec{B}$$

Definindo $d\vec{l}$ como sendo um vetor de comprimento dl apontando na direção e sentido de $\vec{J}$ podemos escrever

$$dl\,\vec{J} = J\,d\vec{l}$$

Assim

$$d\vec{F} = AJ\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

ou

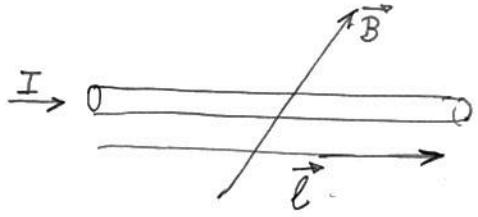
$$d\vec{F} = I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

A força sobre um fio é dada por

$$\vec{F} = I \int_{\text{sobre o fio}} d\vec{l} \times \vec{B}$$

Para um fio retilíneo em um campo uniforme, temos

$$\vec{F} = I\,\vec{l} \times \vec{B}$$



A força sobre um circuito fechado é escrita como

$$\vec{F} = I \oint d\vec{l} \times \vec{B}$$

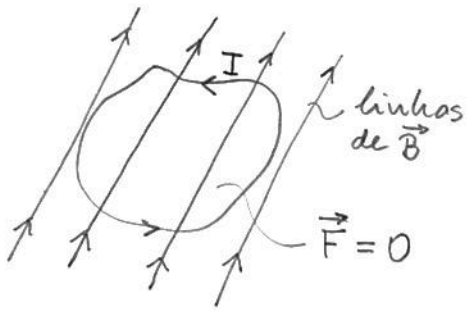
se $\vec{B}$ for uniforme

$$\vec{F} = I\left(\oint d\vec{l}\right) \times \vec{B}$$

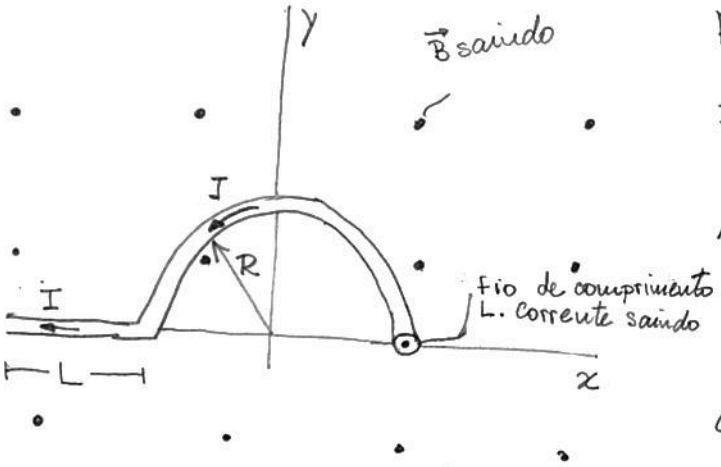
como

$$\oint d\vec{l} = 0,$$

$\vec{F} = 0$



Ex. 27.6

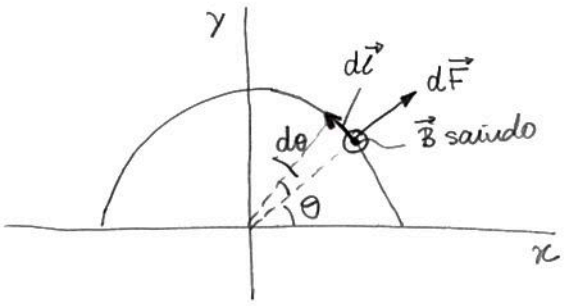


A força sobre o trecho reto à esquerda é

$$\vec{F}_{reto} = I\,\vec{\ell} \times \vec{B} = I(-L\hat{\imath}) \times B\hat{k}$$

$$\vec{F}_{reto} = ILB\,\hat{\jmath}$$

Força sobre o trecho curvo:



$$d\vec{F}_{cur} = I\,d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Em módulo

$$dF_{cur} = I\,d\ell\,B = IR\,d\theta\,B$$

Como $d\vec{F}$ aponta radialmente para fora

$$d\vec{F}_{cur} = IRB\,d\theta\,(\cos\theta\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{\jmath})$$

$$F_x = IRB\int_0^{\pi} \cos\theta\,d\theta = 0$$

$$F_y = IRB\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,d\theta = -IRB\cos\theta\Big|_0^{\pi}$$

$$F_y = +2IRB$$

Assim $\vec{F}_{cur} = 2IRB\,\hat{\jmath}$

No trecho reto que está entrando na página $d\vec{\ell}$ é paralelo a $\vec{B}$, de forma que

$$\vec{F}_{ent} = 0$$

A força total sobre o fio é

$$\vec{F} = IB(L + 2R)\,\hat{\jmath}$$

FORÇA SOBRE UMA ESPIRA TRANSPORTANDO CORRENTE

Considere a espira retangular da figura e suponha $\vec{B}$ na direção y ($\vec{B} = B\hat{\jmath}$).

As forças sobre os lados da espira são

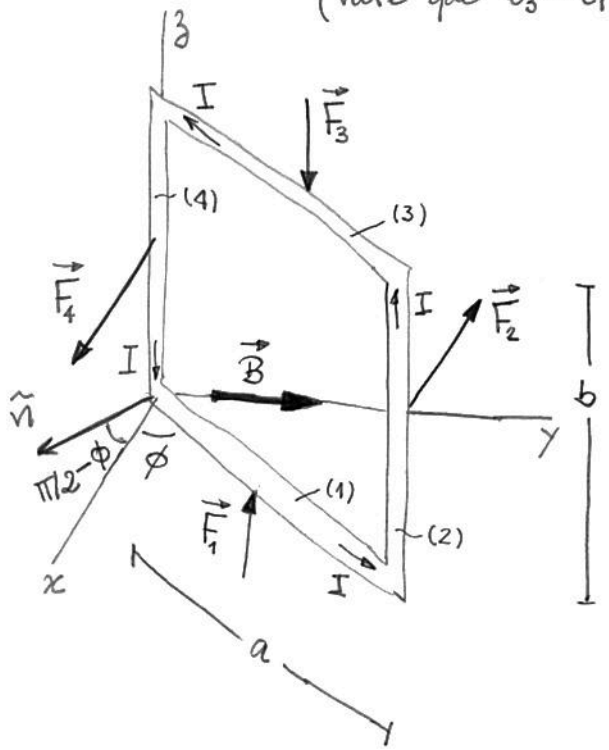
$$\vec{F}_1 = I\,\vec{\ell}_1 \times \vec{B}$$

$$= I(a\cos\phi\,\hat{\imath} + a\operatorname{sen}\phi\,\hat{\jmath}) \times B\hat{\jmath}$$

$$= IaB\cos\phi\,\hat{k}$$

$\vec{F}_3 = I\vec{l}_3 \times \vec{B} = -IaB\cos\phi\,\hat{k}$

(note que $\vec{l}_3 = -\vec{l}_1$)



$\vec{F}_2 = I\vec{l}_2 \times \vec{B}$

$= Ib\hat{k} \times B\hat{j} = -IbB\,\hat{i}$

$\vec{F}_4 = I\vec{l}_4 \times \vec{B} = +IbB\,\hat{i}$

↳ note que $\vec{l}_4 = -\vec{l}_2$

A força resultante é dada por

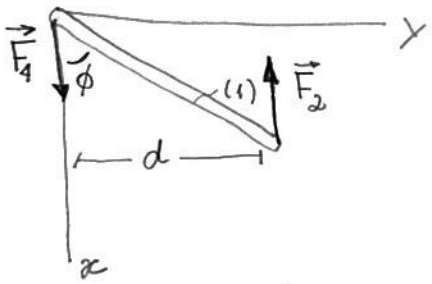
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

Este resultado já era esperado, uma vez que o circuito é fechado e $\vec{B}$ é uniforme.

TORQUE SOBRE A ESPIRA

As forças $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_3$ atuam ao longo da mesma linha e portanto não produzem torque mas $\vec{F}_2$ e $\vec{F}_4$ formam um binário, cujo braço é (ver fig no plano xy)

$$d = a\,\text{sen}\phi$$



O módulo do torque é

$$\tau = F_2 d = IbB \times a\,\text{sen}\phi$$

Pela regra da mão direita, $\vec{\tau}$ é perpendicular à página e aponta saindo. Assim

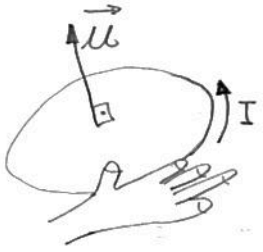
$$\vec{\tau} = Iab\,B\,\text{sen}\phi\,\hat{k}$$

MOMENTO DE DIPOLO MAGNÉTICO

Define-se o momento de dipolo magnético de uma espira plana como sendo um vetor que tem módulo

$$\mu = IA \qquad (A = \text{área da espira})$$

A direção de $\vec{\mu}$ é perpendicular ao plano da espira e o sentido dado pela regra da mão direita



Na nossa espira retangular

$$\vec{\mu} = Iab\,\hat{n}$$

onde

$\hat{n} = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi)\,\hat{i} - \text{sen}(\frac{\pi}{2} - \phi)\,\hat{j}$

$n = \text{sen}\phi\,\hat{i} - \cos\phi\,\hat{j}$

Portanto

$$\vec{\mu} = Iab(\text{sen}\phi\,\hat{i} - \cos\phi\,\hat{j})$$

Pode-se mostrar (isto é feito em um curso de eletromagnetismo) que o torque sobre uma espira é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Note a analogia com o caso elétrico onde o torque sobre um dipolo elétrico é

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

No caso da espira retangular

$$\vec{\tau} = Iab(\text{sen}\phi\,\hat{i} - \cos\phi\,\hat{j}) \times B\,\hat{j}$$

$$= IabB\,\text{sen}\phi\,\hat{k}$$

que é o mesmo resultado obtido antes.

Como no caso de um dipolo elétrico, é fácil mostrar que a energia potencial do dipolo magnético em um campo $\vec{B}$ é dada por

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Reveja a demonstração no cap. 22.

Problemas: VELHO (NOVO)

5(Q12), 15(21), 19(27), 23(31), 28(34)
32(46), 37(51), 43(57), 42(60), 49(65)
52(72), 53(67), 57(75), 63(81), 65(83)
67(85), 68(84), 66(86), 69(87), 72(90)

Respostas dos pares.

28. $F = 0,297\ N$

32. (a) $\vec{\tau} = -NIAB\,\hat{i}$ $\quad U = 0$
(b) $\vec{\tau} = 0$ $\quad U = -NIAB$
(c) $\vec{\tau} = NIAB\,\hat{i}$ $\quad U = 0$
(d) $\vec{\tau} = 0$ $\quad U = +NIAB$

42. (b) $d = 6,8$ cm. É significativo comparado com D.

52. (a) $F = ILB$ para a direita
(b) $d = \dfrac{mv^2}{2ILB}$ $\quad$ (c) $d = 3140$ km

66. (a) $I_u = \dfrac{ev}{3\pi r}$ $\quad$ (b) $\mu_u = \dfrac{evr}{3}$

(c) $\mu = \dfrac{2evr}{3}$ $\quad$ (d) $v = 7,55 \times 10^7$ m/s

68. (a) $d\vec{F} = -IRB_x \cos\theta\, d\theta\,\hat{k}$

(c) $d\vec{\tau} = IR^2B_x[-\text{sen}\theta\cos\theta\,\hat{i} + \cos^2\theta\,\hat{j}]\,d\theta$

(d) $\vec{\tau} = I\pi R^2 B_x\,\hat{j} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

onde $\vec{\mu} = I\pi R^2\,\hat{k}$

No prob 63,

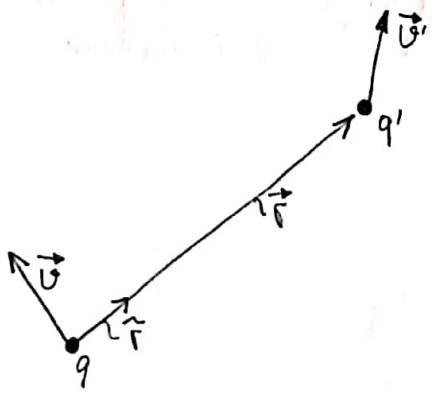
$$\vec{B} = -\frac{B_0}{L}z\,\hat{j} + \frac{B_0}{L}y\,\hat{k}$$

8. FONTES DE CAMPO MAGNÉTICO

CAMPO MAGNÉTICO DE UMA CARGA EM MOVIMENTO

A figura abaixo mostra uma partícula de carga q e velocidade v na origem e outra partícula com carga q' e velocidade $\vec{v}'$ no ponto $\vec{r}$. A lei de Coulomb afirma que a há uma força elétrica sobre q' dada por

$$\vec{F}_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\hat{r} \qquad \text{(sobre } q')$$



A experiência mostra que há uma outra força que depende das velocidades das partículas. Esta força é chamada força magnética e dada por

$$\vec{F}_B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qq'}{r^2}\vec{v}'\times(\vec{v}\times\hat{r}) \qquad \text{(sobre } q')$$

O conceito de campo elétrico nos permite escrever a força elétrica como

$$\vec{F}_E = q'\vec{E} \quad \leftarrow \text{força sobre } q'$$

onde

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$ campo elétrico produzido por q.

Da mesma forma, escreve-se a força magnética como

$$\vec{F}_B = q'\vec{v}'\times\vec{B}$$ força sobre q'

onde

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

$\hat{r}$ aponta da carga que gera o campo até o ponto onde o campo está sendo calculado.

é o campo magnético produzido pela carga q.

A constante μ_0 é definida como

$$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\ T\cdot m/A$$

Ver campo de um fio infinito na pag. 3 para concluir que esta é a unidade de μ_0.

onde $\frac{T\cdot m}{A} = \frac{N}{A\cdot m}\cdot\frac{m}{A} = \frac{N}{A^2}$

Mais à frente ficará claro porque μ_0 é definido e não medido.

A VELOCIDADE DA LUZ

Mais adiante vamos mostrar a existência de ondas eletromagnéticas e que estas ondas se propagam no vácuo com velocidade dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$$

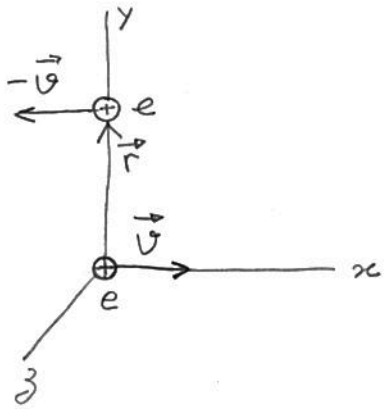
Substituindo os valores de μ_0 e ϵ_0 verificamos que

Digitalizado com CamScanner

$C = 3{,}00 \times 10^8$ m/s

A identificação deste valor com a velocidade da luz no vácuo levou J. C. Maxwell a propor que a luz é uma onda eletromagnética.

Ex. 28.1. Comparação entre F_E e F_B. Na figura, dois prótons se movem com velocidades iguais e em sentidos opostos.



$$\vec{F}_E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{j}$$ força sobre o próton de cima

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e(v\hat{i})\times\hat{j}}{r^2} = \frac{\mu_0 e v}{4\pi r^2}\hat{k}$$

$\vec{B}$: Campo magnético produzido pelo próton de baixo no ponto onde está o próton de cima

A força sobre o próton de cima é

$$\vec{F}_B = e(-v\hat{i})\times\frac{\mu_0 e v}{4\pi r^2}\hat{k}$$

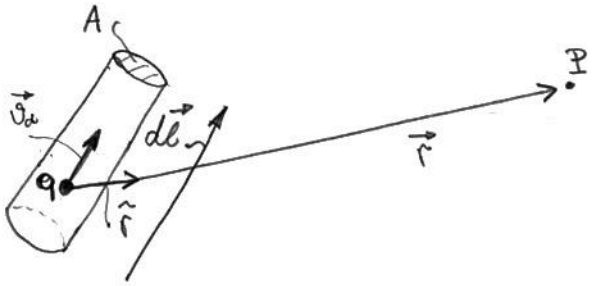
$$\vec{F}_B = \frac{\mu_0 e^2 v^2}{4\pi r^2}\hat{j}$$

Em módulo, temos

$$\frac{F_B}{F_E} = \mu_0\epsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

Se $v \ll c$, então $F_B \ll F_E$.

CAMPO MAGNÉTICO DE UM ELEMENTO DE CORRENTE



O campo magnético no ponto P, produzido pela carga q, com velocidade $\vec{v}_d$, é dado por

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}_d\times\hat{r}}{r^2}$$

O campo dos $nA\,dl$ portadores do elemento de fio é dado por

$$d\vec{B} = nA\,dl\,\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}_d\times\hat{r}}{r^2}$$

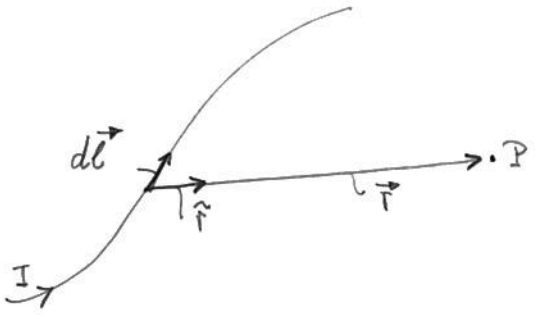
Como $\vec{J} = nq\vec{v}_d$, podemos escrever

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}A\,dl\,\frac{\vec{J}\times\hat{r}}{r^2}$$

Como $dl\,\vec{J} = J\,d\vec{l}$ e $JA = I$,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$ → $\hat{r}$ aponta do elemento de fio para o ponto P.

CAMPO DE UM FIO



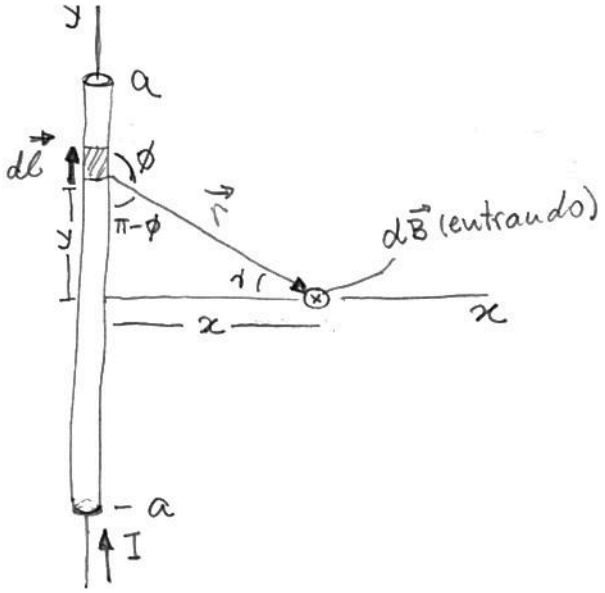
Para um fio, o campo magnético é dado por

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{sobre o fio}} \frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$$

Não se esqueça que $\vec{r}$ varia durante a integração.

Esta expressão é conhecida como lei de Biot-Savart.

FIO RETILÍNEO



$d\vec{l} = dy\,\hat{j}$, de forma que, em módulo,

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dy \operatorname{sen}\phi}{r^2} \quad \text{(entrando)}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}(\pi-\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} dy$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^{a} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} dy \quad \text{(entrando)}$$

Fazendo $y = x \operatorname{tg}\gamma$ (ver figura)

$$dy = x \sec^2\gamma \, d\gamma$$

$$\int \cdots dx = \frac{1}{x} \int \cos\gamma \, d\gamma = \frac{1}{x} \operatorname{sen}\gamma$$

$$= \frac{1}{x} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Portanto,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Bigg|_{-a}^{a}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}} \quad \text{(entrando na página)}$$

Se $a >> x$,

$$B \simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

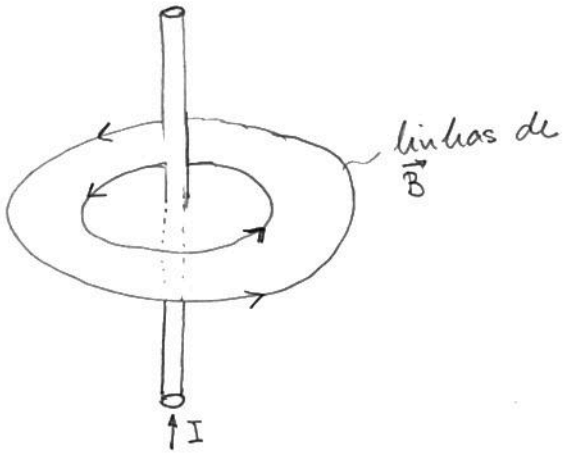
Desta expressão você conclui que

$$[\mu_0] = \frac{[B]\cdot[x]}{[I]}$$

Esta expressão é conhecida como o campo magnético de um fio retilíneo infinito que transporta uma corrente I.

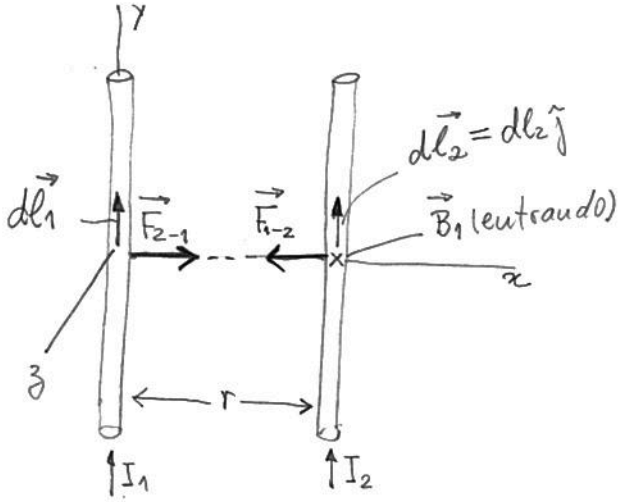
O resultado obtido aqui pode ser generalizado para outros pontos a uma distância r do fio. A figura abaixo mostra as linhas de $\vec{B}$

para um fio retilíneo



FORÇA ENTRE FIOS PARALELOS TRANSPORTANDO CORRENTES

Vamos supor inicialmente que as correntes são no mesmo sentido.



O campo magnético produzido pelo fio 1 sobre o fio 2 é dado por

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}\hat{k}$$

A força sobre o elemento $d\vec{l}_2$ do fio 2 é

$$d\vec{F}_{1-2} = I_2\, d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl_2 \hat{j}\times\hat{k} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dl_2 \hat{i}$$

(força atrativa)

A força por comprimento do fio 2 é dada por

$$\frac{d\vec{F}_{1-2}}{dl_2} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\hat{i}$$

Analogamente é fácil ver que a força por comprimento que o fio 2 exerce sobre o fio 1 é

$$\frac{d\vec{F}_{2-1}}{dl_1} = +\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}\hat{i}$$

força atrativa

Estes resultados mostram que a terceira lei de Newton é válida e que quando as correntes são no mesmo sentido a força é atrativa.

Quando as correntes são em sentidos contrários verifica-se que a força magnética entre os fios é repulsiva. Verifique isto!

DEFINIÇÃO DE AMPÈRE

Define-se o ampère como sendo a corrente que ao passar em dois fios retilíneos, infinitos, separados por uma distância de 1m, produz sobre cada um deles uma força por comprimento igual a 2×10^{-7} N/m.

O VALOR DE μ_0

A força por unidade de comprimento pode ser escrita, em módulo, como

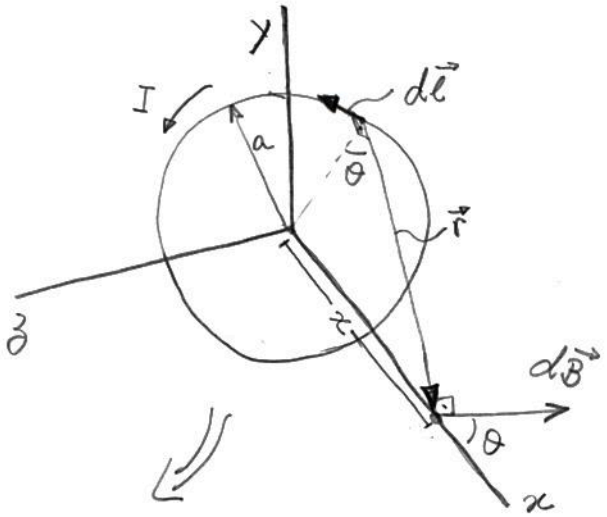
$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \Rightarrow \mu_0 = \frac{2\pi r}{I_1 I_2}\frac{dF}{dl}$$

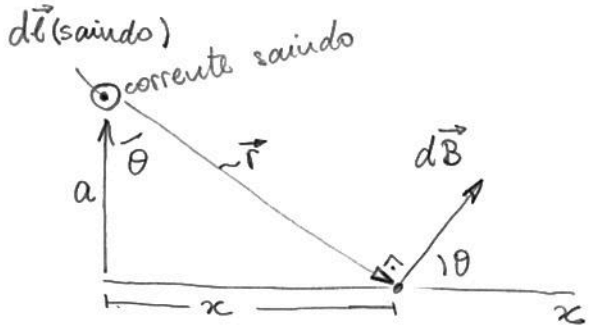
Se $I_1 = I_2 = 1A$ e $r = 1m$, então $dF/dl = 2 \times 10^{-7} N/m$, de forma que

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \ N/A^2$$

Note que este valor de μ_0 é uma consequência da definição do ampère.

ESPIRA CIRCULAR





⊗ → corrente entrando

Em módulo

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \cdot 1 \cdot \text{sen}90°}{(x^2+a^2)}$$

Por simetria, só a componente B_x é não nula. Para esta componente, temos

$$dB_x = dB\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl}{(x^2+a^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Integrando, temos

$$B_x = \frac{\mu_0 I a}{4\pi (x^2+a^2)^{3/2}} \underbrace{\oint dl}_{2\pi a}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}}$$

Se tivermos uma bobina com N espiras enroladas compactamente,

$$B_x = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}}$$

O momento de dipolo é dado por $\vec{\mu} = NI\pi a^2 \hat{i}$, de forma que o campo magnético pode também ser escrito como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{\mu}}{2\pi (x^2+a^2)^{3/2}}$$

note da figura que $\vec{B}$ e $\vec{\mu}$ apontam na mesma direção e mesmo sentido.

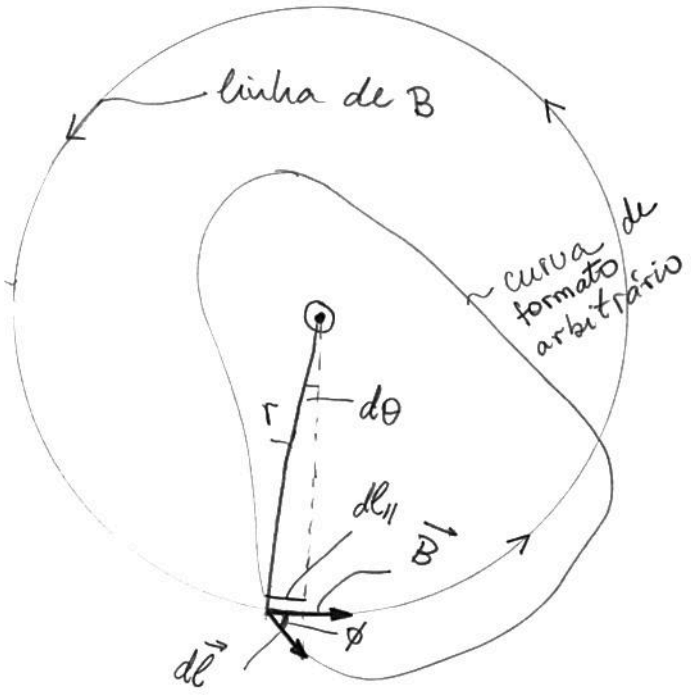
LEI DE AMPÈRE

Considere um fio retilíneo, infinito, perpendicular ao plano da página, que atravessa a área delimitada por uma curva fechada de formato arbitrário. Suponha que o fio transporta uma corrente I para fora da página.

Considere a integral de linha

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c B\, dl \cos\phi = \oint_c B\, dl_{\parallel}$$

onde $dl_{\parallel} = dl\cos\phi$ é a componente de $d\vec{l}$ na direção de $\vec{B}$.



$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_c \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, dl_{\parallel}$$

como $\dfrac{dl_{\parallel}}{r} = d\theta$,

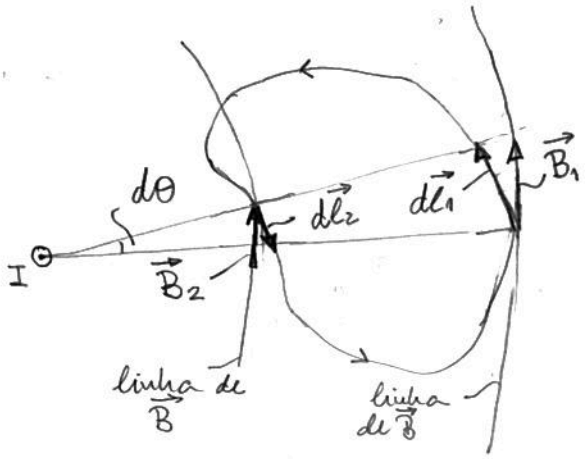
$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\underbrace{\oint_c d\theta}_{2\pi} = \mu_0 I$$

Note que este resultado não depende da forma da curva fechada nem da posição do fio no interior da curva.

Se a corrente estivesse entrando teríamos

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$$

Considere agora o fio fora da área delimitada pela curva



$$\vec{B}_1\cdot d\vec{l}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\, d\theta$$

Note que $d\theta$ é o mesmo para $d\vec{l}_1$ e $d\vec{l}_2$

$$\vec{B}_2\cdot d\vec{l}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\, d\theta$$

note que $\vec{B}_2$ e $d\vec{l}_2$ apontam em sentidos contrários

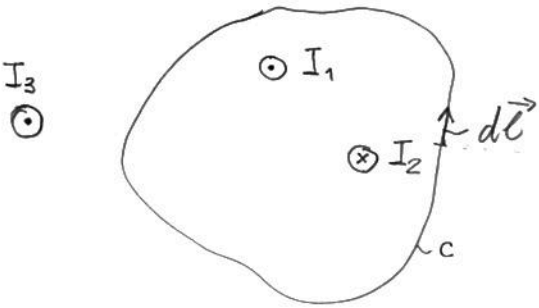
como

$$\vec{B}_1\cdot d\vec{l}_1 + \vec{B}_2\cdot d\vec{l}_2 = 0,$$

podemos concluir que

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$$

Considere agora três fios: um fora e dois dentro da área delimitada pela curva.



$\oint_c \vec{B}_1\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1$
↳ campo produzido pelo fio 1

$\oint_c \vec{B}_2\cdot d\vec{l} = -\mu_0 I_2$
↳ corrente entrando

$\oint \vec{B}_3\cdot d\vec{l} = 0$
↳ fio fora

Se $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$ for o campo resultante dos três fios, temos

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_c \vec{B}_1\cdot d\vec{l} + \oint_c \vec{B}_2\cdot d\vec{l} + \oint_c \vec{B}_3\cdot d\vec{l} = \mu_0(I_1 - I_2)$$

Generalizando, podemos escrever

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int}$$

onde I_{int} é a soma algébrica das correntes que atravessam a área delimitada pela curva.

Convenções:

1) A circulação é feita no sentido anti-horário.

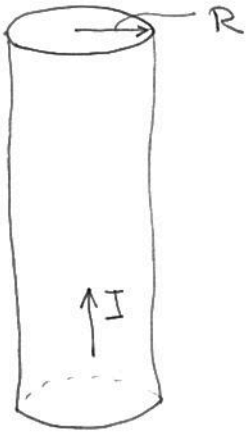
2) corrente saindo $\Rightarrow$ sinal + corrente entrando $\Rightarrow$ sinal −

A equação integral acima é conhecida como lei de Ampère.

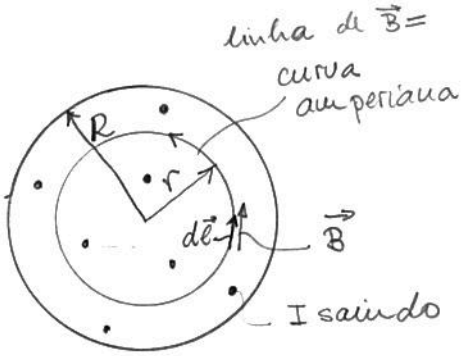
Embora em nossa dedução tenhamos considerado que os fios que transportam as correntes sejam retilíneos e infinitos, a lei de Ampère é sempre válida.

Ex. 28.8 CILINDRO CONDUTOR LONGO

Considere um cilindro condutor longo, de raio R, transportando uma corrente I uniformemente distribuída em sua seção transversal.



(a) Campo dentro do condutor



Por simetria, as linhas de $\vec{B}$ devem ser circunferências concêntricas ao eixo do cilindro. Assim

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_c B\,dl = B\oint dl = B2\pi r$$

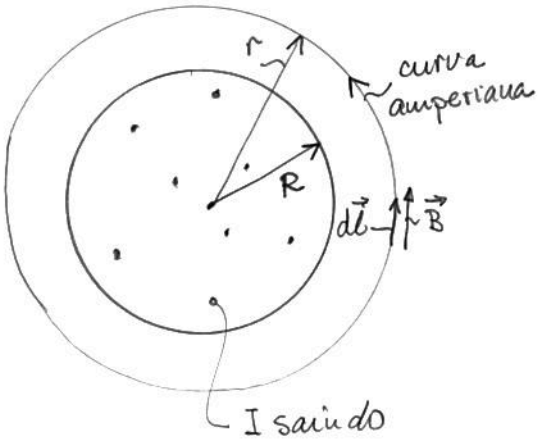
A corrente no interior da "curva amperiana" pode ser calculada pela "regra de três"

$$\begin{matrix} I_{int} & — & \pi r^2 \\ I & — & \pi R^2 \end{matrix} \Rightarrow I_{int} = I\frac{r^2}{R^2}$$

Substituindo estes resultados na lei de Ampère, obtemos

$$B2\pi r = \mu_0 I\frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

(b) campo fora do condutor



Pelos mesmos argumentos de simetria, temos

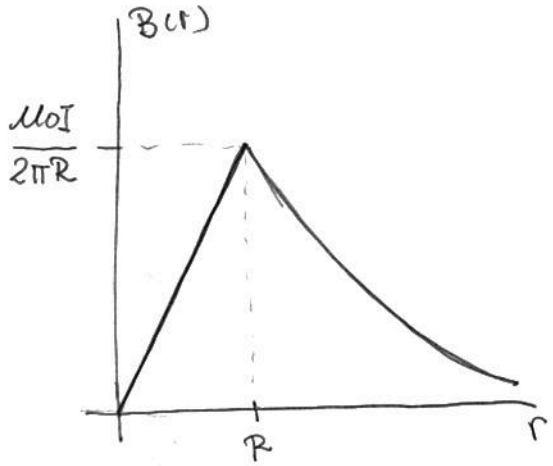
$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B2\pi r$$

Agora $I_{int} = I$, de forma que

$$B2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

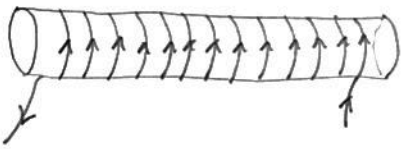
que é o mesmo resultado obtido pela lei de Biot-Savart para um fio retilíneo infinito (pag. 3).

Gráfico

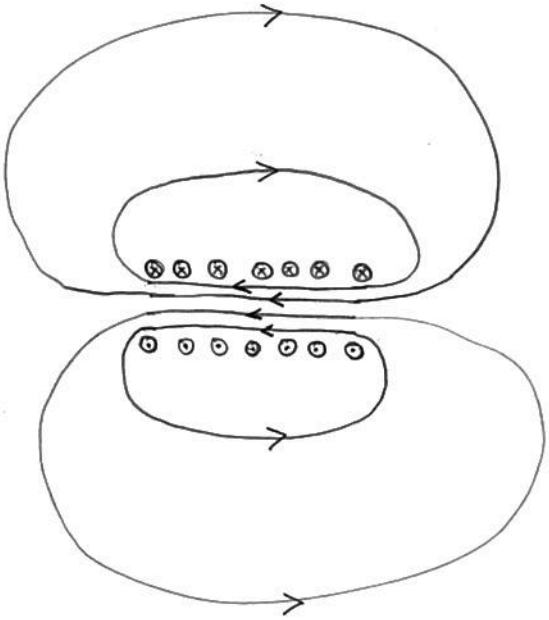


Ex 20.9) SOLENÓIDE

Considere um solenóide fino e comprido.



De acordo com a lei de Gauss do magnetismo as linhas de $\vec{B}$ devem ser fechadas, de forma que no caso do solenóide elas têm a forma abaixo.



Pode-se notar que

$$B_{ext} << B_{int}$$

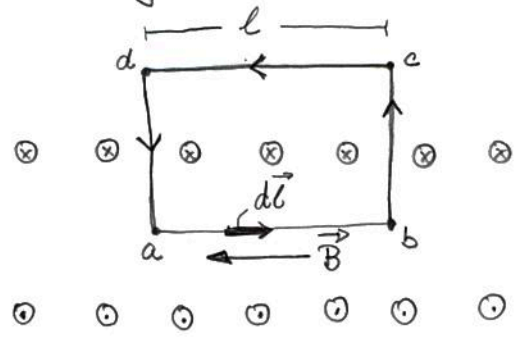
Aqui vamos supor

$$B_{ext} = 0$$

por simplicidade.

Para calcular B_{int} vamos aplicar a lei de Ampère

ao retângulo abcda abaixo.



$$\oint_{abcda} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$$

porque nos outros trechos $\vec{B}$ é nulo ou perpendicular a $d\vec{\ell}$.

$$\int_a^b \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = -B\ell$$

↳ $\vec{B}$ é contrário a $d\vec{\ell}$

Por outro lado,

$$I_{int} = -n\ell I$$

↳ corrente entrando

onde n é número de espiras por comprimento.

Da lei de Ampère

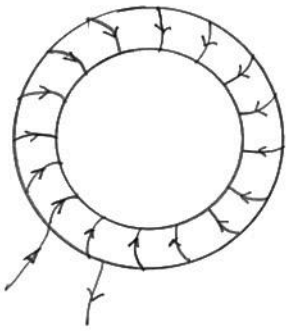
$$-B\ell = -\mu_0 n I \ell \Rightarrow \boxed{B = +\mu_0 n I}$$

O sinal + em B indica que a suposição inicial ($\vec{B}$ para a esquerda no interior do solenóide) está correta.

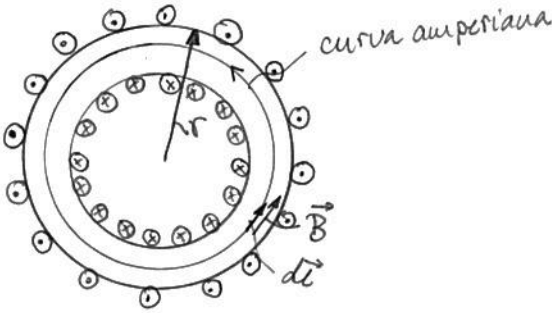
Note que o resultado obtido não depende da posição do trecho ab, indicando que $\vec{B}$ é uniforme no interior do solenóide.

Ex. 29.10 TOROIDE

Considere um fio que transporta uma corrente I enrolado N vezes em um núcleo em forma de "pneu".



Por simetria, as linhas de $\vec{B}$ devem ser circunferências concêntricas ao eixo do toróide. Vamos supor as linhas de $\vec{B}$ no sentido anti-horário.



$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint_c B\,d\ell = B\oint_c d\ell = B\,2\pi r$$

$$I_{int} = -NI$$

↳ corrente entrando

Da lei de Ampère

$$B\,2\pi r = -\mu_0 N I \Rightarrow B = -\frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

O sinal − significa que $\vec{B}$ tem sentido contrário à suposição inicial, ou seja, $\vec{B}$ aponta no sentido horário.

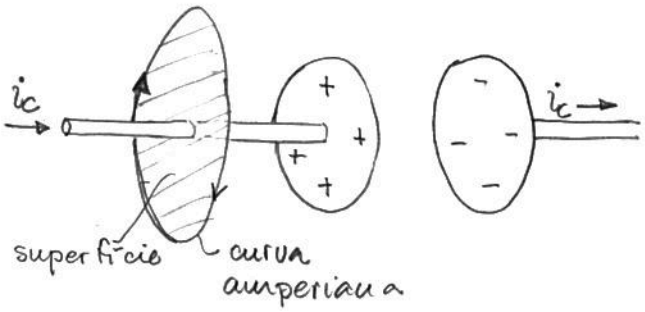
CORRENTE DE DESLOCAMENTO

A lei de Ampère como apresentada anteriormente mostra uma contradição quando aplicada a um capacitor sendo carregado.

Quando aplicada à curva fechada que delimita a área plana da figura abaixo, a lei de Ampère nos leva a

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c$$

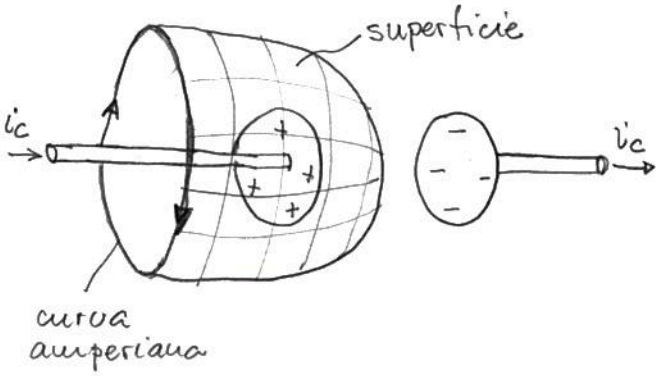
onde i_c é a corrente no fio que carrega o capacitor.



Agora considere a mesma curva fechada delimitando a área em forma de "coador de café". Neste caso

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

porque nenhuma corrente atravessa a superfície.



Há uma clara contradição, e para eliminá-la, J. C. Maxwell postulou a existência de um termo extra na lei de Ampère. Ele incluiu uma corrente efetiva, que ele chamou de corrente de deslocamento, i_d, de forma que a "nova" lei de Ampère é escrita como

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_c + i_d)_{int}$$

Neste contexto a corrente i_c é chamada corrente de condução.

Para obter uma expressão para i_d, note que a carga no capacitor é dada por

$$q = CV = \frac{\epsilon A}{d} \underbrace{Ed}_{\text{se for no vácuo é } \epsilon_0} = \epsilon A E = \epsilon \Phi_E$$

onde $\Phi_E = EA$ é o fluxo do campo elétrico entre as placas do capacitor. Derivando a equação acima em relação ao tempo, obtemos

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Maxwell postulou que

$$i_d = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

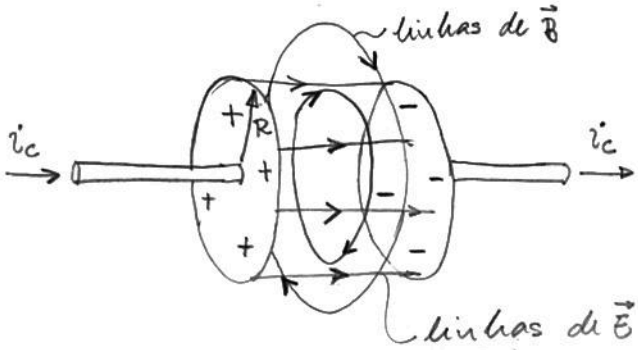
de forma que i_d na superfície curva seja igual a i_c na superfície plana. Assim a lei de Ampère nos leva ao mesmo resultado quando usamos as duas superfícies: quando usamos

a superfície plana, $i_{d,int} = 0$ e $i_{c,int} = i_c$; quando usamos a superfície em forma de "coador de café", $i_{c,int} = 0$ e $i_{d,int} = i_c$.

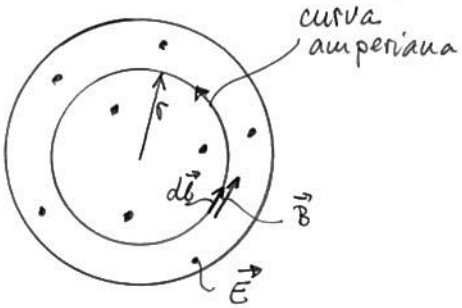
Associada à corrente de deslocamento temos uma densidade de corrente de deslocamento dada por

$$\vec{j}_d = \epsilon \frac{d\vec{E}}{dt}$$

CÁLCULO DE $\vec{B}$ NO INTERIOR DO CAPACITOR



(a) $r \leq R$.



$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_c B\, dl = B \oint_c dl = B 2\pi r$$

$$j_d = \epsilon \frac{dE}{dt} = \epsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma}{\epsilon}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{\pi R^2}\right) = \frac{i_c}{\pi R^2}$$

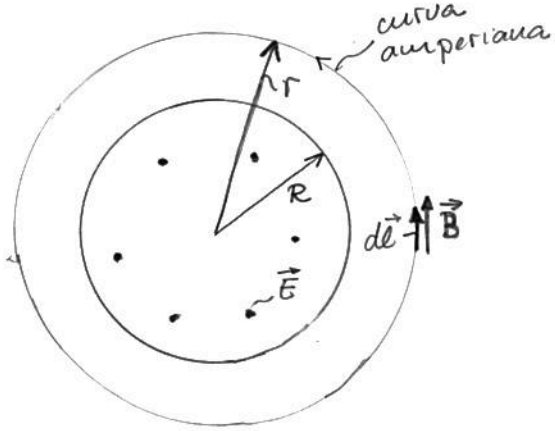
$$i_{d,int} = \pi r^2 j_d = i_c \frac{r^2}{R^2}$$

Obviamente $i_{c,int} = 0$.

Da lei de Ampère,

$$B 2\pi r = \mu_0 i_c \frac{r^2}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i_c r}{2\pi R^2}$$

(b) $r > R$.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r$$

$$i_{d,int} = j_d \pi R^2 = i_c$$

$$i_{c,int} = 0$$

Da lei de Ampère

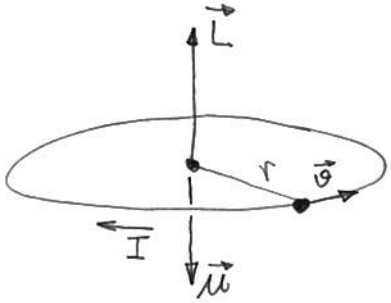
$$B 2\pi r = \mu_0 i_c \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}$$

Experimentalmente pode-se medir o campo magnético induzido (devido à corrente de deslocamento), o que confirma a existência do termo extra ($\mu_0 i_{d,int}$) na lei de Ampère. A inclusão deste termo é fundamental para a existência das ondas eletromagnéticas que vamos estudar mais adiante.

MOMENTOS DE DIPOLO MAGNÉTICOS ATÔMICOS

1) Momento de dipolo magnético orbital.

Considere um elétron girando em torno de um núcleo atômico em uma órbita circular de raio r com velocidade de módulo v.



O período do movimento é dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

de forma que a corrente associada é

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

Como a carga do elétron é negativa, I é contrário à velocidade do elétron.

O momento de dipolo magnético é dado, em módulo, por

$$\mu = I\pi r^2 = \frac{ev}{2\pi r}\cdot \pi r^2 = \frac{evr}{2}$$

Pela regra da mão direita, $\vec{\mu}$ aponta para baixo na figura.

Por outro lado, o momento angular orbital do elétron é dado, em módulo, por

$$L = mvr$$

e aponta para cima. Assim

$$\frac{\mu}{L} = \frac{evr/2}{mvr} = \frac{e}{2m}$$

Vetorialmente,

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$$

$\vec{\mu}$ e $\vec{L}$ apontam em sentidos contrários

A mecânica quântica prevê que uma das componentes do momento angular, por exemplo a componente L_z, só pode assumir os valores

$$L_z = n\hbar \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

onde

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}054 \times 10^{-34}\ \text{J.s}$$

sendo

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J.s}$$

a constante de Planck.

Assim, a componente z de $\vec{\mu}$ é dada por

$$\mu_z = -\frac{e}{2m} \times n\hbar = -n\frac{e\hbar}{2m}$$

A constante

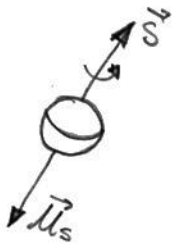
$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = \frac{eh}{4\pi m} = 9{,}274 \times 10^{-24}\ \text{A.m}^2$$

é chamada magneton de Bohr e é a unidade fundamental de momento de dipolo magnético. Escrevemos

$$\mu_z = -n\mu_B \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

1) Momento de dipolo magnético de spin.

O elétron possui um momento angular intrínseco chamado momento angular de spin. Classicamente falando, é como se o elétron girasse em torno do seu eixo.



A componente z de $\vec{S}$ pode assumir dois valores:

$$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$$

Associado a este momento angular existe um momento de dipolo magnético de spin cuja componente z assume os valores

$$\mu_{s,z} = \mp \mu_B$$

Note que μ_{sz} é contrário a S_z.

MAGNETIZAÇÃO

Em geral os momentos magnéticos de um sistema macroscópico se cancelam mas quando o material é submetido a um campo magnético aplicado pode haver a orientação dos dipolos atômicos produzindo um dipolo líquido na amostra. A magnetização é definida como

$$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}_{total}}{volume}$$

O material magnetizado produz um campo magnético próprio e pode-se mostrar que o campo magnético total no interior da amostra é dado por

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$$

onde $\vec{B}_0$ é o campo aplicado (produzido por correntes) e $\mu_0 \vec{M}$ é o campo produzido pelo próprio material magnetizado.

Em geral

$$\mu_0 \vec{M} = \chi_m \vec{B}_0$$

onde χ_m é uma constante que depende do material, chamada susceptibilidade magnética. Assim, podemos escrever

$$\vec{B} = K_m \vec{B}_0$$

onde

$$K_m = 1 + \chi_m$$

é chamado permeabilidade relativa do material.

Muitas vezes se usa a notação

$$K_m = \mu/\mu_0 \Rightarrow \mu = \mu_0 K_m$$

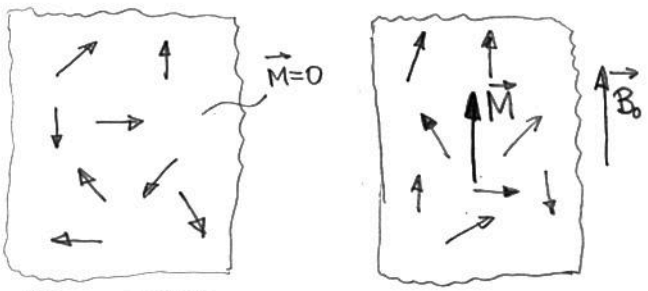
onde μ é chamado permeabilidade (não confundir com o momento de dipolo)

Se $\chi_m > 0$ ($K_m > 1$) o material é dito paramagnético.

Se $\chi_m < 0$ ($K_m < 1$) o material é dito diamagnético.

PARAMAGNETISMO

Um material é paramagnético quando os átomos possuem momentos de dipolo líquidos. Como existe uma tendência dos dipolos se alinharem com o campo, surge uma magnetização $\vec{M}$ alinhada com $\vec{B}$ (por isto $\chi_m > 0$). O alinhamento não é completo por causa da agitação térmica e $\vec{M}$ decresce com o aumento da temperatura.



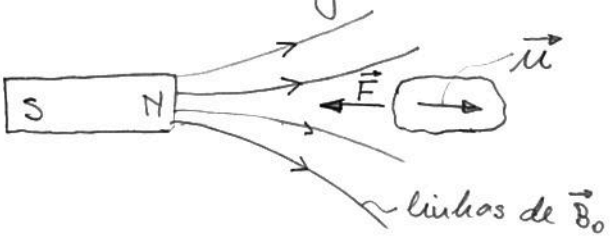
Sem campo aplicado

Em geral os materiais paramagnéticos obedem à relação

$$M = C\,\frac{B}{T}$$

que é chamada lei de Curie. A constante C é chamada constante de Curie e depende do material. A lei de Curie não vale para temperaturas muito baixas.
À temperatura ambiente, $\chi_m \ll 1$.

Quando um material paramagnético é colocado próximo de um imã ele é atraído. Para entender este comportamento considere a figura abaixo.



Como $\vec{\mu}$ tem o mesmo sentido de $\vec{B}_0$, a energia de interação do dipolo com o campo é dada por

$$U = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}_0 = -\mu B_0$$

$\vec{F} = -\vec{\nabla}\cdot U$, de forma que $\vec{F}$ aponta no sentido em que U decresce. Portanto, $\vec{F}$ aponta para próximo do imã, onde $\vec{B}_0$ é mais intenso e U é mais negativo.

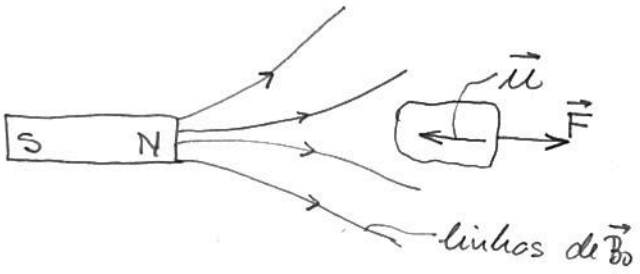
Em geral a força de atração é pequena porque o momento de dipolo induzido é pequeno ($\chi_m \ll 1$).

DIAMAGNETISMO

Em muitos átomos os momentos magnéticos dos elétrons se cancelam e não há momento

magnético líquido. Neste caso surge uma magnetização induzida que é contrária a $\vec{B}_0$. Este fenômeno é explicado pela lei da indução que será apresentada no próximo capítulo. Neste caso $\chi_m < 0$ e o material é dito diamagnético. Em geral χ_m praticamente não depende da temperatura e $|\chi_m| << 1$.

Se um material diamagnético for colocado próximo de um ímã ele é repelido.



Como $\vec{\mu}$ é contrário a $\vec{B}_0$,

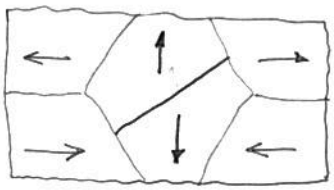
$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = +\mu B_0$$

A força aponta para pontos mais afastados do ímã, onde $\vec{B}_0$ é mais fraco e U é menos positivo.

Como no paramagnetismo, a força é pequena porque $\vec{\mu}$ é pequeno ($|\chi_m| << 1$).

FERROMAGNETISMO

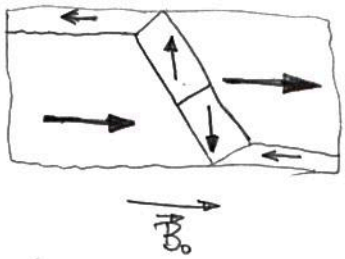
Em alguns materiais, como o ferro, cobalto e níquel, os momentos magnéticos dos átomos vizinhos tendem a se alinhar no mesmo sentido, mesmo na ausência de campo magnético aplicado. O material apresenta regiões, chamadas domínios, onde há um momento de dipolo líquido.



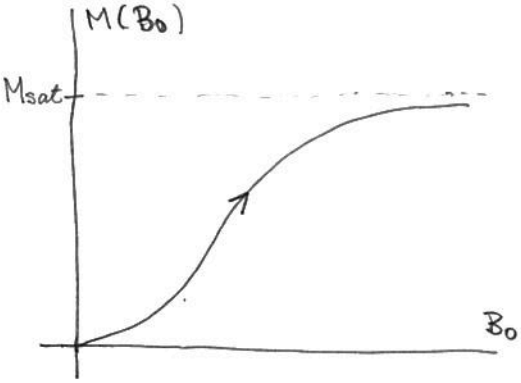
sem campo

Na ausência de campo aplicado a magnetização total é nula porque os domínios apontam em direções aleatórias.

A aplicação de um campo magnético externo faz os domínios com $\vec{\mu}$ no sentido de $\vec{B}_0$ aumentarem e os domínios com $\vec{\mu}$ contrário a $\vec{B}_0$ diminuirem. Surge uma magnetização líquida no material.

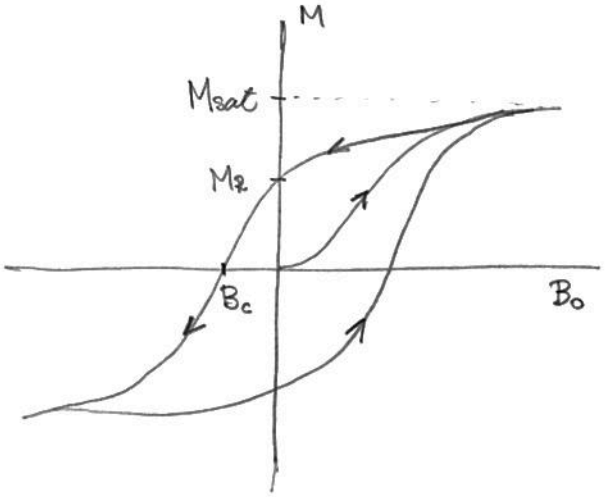


CURVA $M \times B_0$



À medida que B_0 cresce, M tende para uma magnetização de saturação, M_{sat}, que corresponde à situação onde os momentos de todos os domínios se alinham com $\vec{B}_0$.

Quando B_0 diminui novamente, M também diminui, mas quando $B_0 = 0$, M não volta a ser nulo porque muitos domínios não voltam à situação original. Sobra uma magnetização chamada magnetização remanescente, M_R. Um ímã permanente corresponde a esta situação, onde $M = M_R$ com $B_0 = 0$.



É preciso aplicar um campo no sentido contrário, chamado campo coercivo, B_c, para anular a magnetização.

O ciclo completo, mostrado na figura acima, é chamado histerese. Em geral o caminho de "ida" não é igual ao caminho de "volta".

A magnetização induzida no ferromagnetismo é muito maior que no paramagnetismo e no diamagnetismo. No ferromagnetismo K_m pode chegar a 10^5.

Acima de uma temperatura chamada temperatura crítica o material deixa de ser ferromagnético e se torna paramagnético.

Respostas dos pares

14. $\frac{\mu_0 I^2}{4\pi d}$ para cima, no fio de cima

0 no fio do meio

$\frac{\mu_0 I^2}{4\pi d}$ para baixo, no fio de baixo

24. (a) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (b) $B = 0$

46. (b) $B = \frac{\mu_0 I a}{\pi (x^2 + a^2)}$ na direção x

(d) $x = 0$; (e) $B \simeq \frac{\mu_0 I a}{\pi x^2}$

50. $F = 7{,}97 \times 10^{-5}$ N para a esquerda

60. (a) $B = 0$; (b) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \frac{(r^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)}$

(c) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

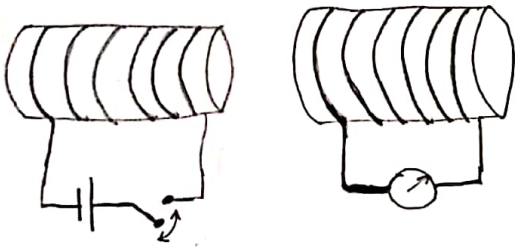
66. (a) $B = 0$; (b) $B = \mu_0 n I$ para a direita; (c) $B = 0$

PROBLEMAS: VELHO (NOVO)
4(7), 9(18), 14(28), 15(29), 19(31), 24(37), 25(38), 31(47), 33(49), 40(51) 43(58), 46(60), 50(64), 53(67), 55(69), 60(74), 61(77), 63(79), 65(81), 66(82)

9. INDUÇÃO ELETROMAGNÉTICA

Em 1831 Faraday realizou uma série de experiências que mostraram que uma fem pode ser gerada em um circuito através da variação do fluxo do campo magnético. Em seguida vamos descrever duas destas experiências.

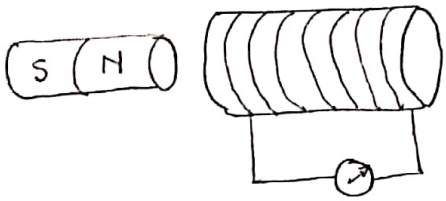
(1) Uma bobina ligada a uma bateria é colocada nas proximidades de outra bobina ligada a um galvanômetro



Quando a chave está fechada e há uma corrente estacionária na bobina da esquerda nenhuma corrente é detectada na bobina da direita. Por outro lado, nos momentos em que a chave é ligada ou desligada surgem correntes que são detectadas no galvanômetro. É somente quando a corrente na bobina da esquerda está variando que surge a corrente na bobina da direita.

A corrente que surge na bobina da direita no momento em que a chave é desligada tem sentido oposto àquela que surge quando a chave é ligada.

(2) Um ímã é colocado nas proximidades de uma bobina ligada a um galvanômetro.



Quando o ímã se aproxima da bobina surge uma corrente que é detectada no galvanômetro. Se o ímã permanece em repouso em relação à bobina, não há corrente induzida. Se o ímã permanece em repouso mas a bobina se move, também há corrente na bobina. O que importa é o movimento relativo entre o ímã e a bobina.

Quanto maior a velocidade relativa, maior a corrente induzida.

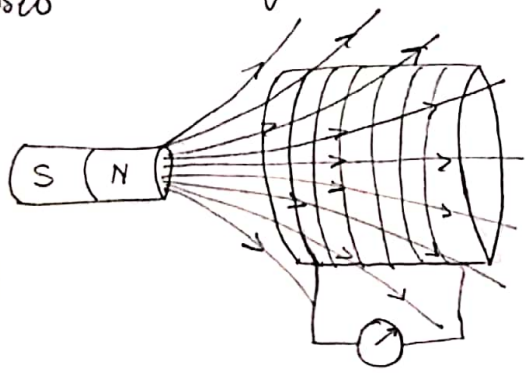
Se o movimento for de afastamento, a corrente na bobina terá sentido oposto ao da corrente que surge quando o movimento é de aproximação. A corrente também muda de sentido se os polos N e S do ímã forem invertidos.

O que há de comum nestas experiências? Por que surge a corrente induzida? Faraday

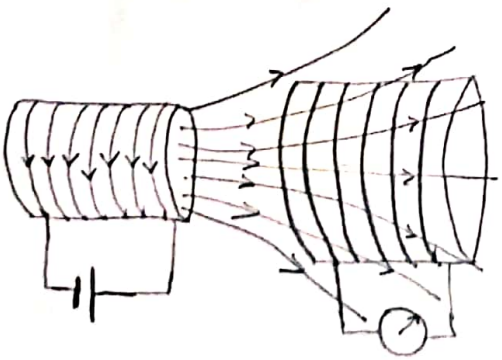
Digitalizado com CamScanner

concluiu que é a variação no fluxo do campo magnético através da bobina ligada ao galvanômetro que dá origem à corrente induzida.

Na segunda experiência pode-se ver que quando o ímã se aproxima, aumenta o número de linhas de $\vec{B}$ que atravessam a bobina, aumentando o fluxo de $\vec{B}$. Portanto surge uma corrente induzida. Se o ímã se afasta, diminui o fluxo de $\vec{B}$ e a corrente surge no sentido oposto



Algo semelhante ocorre na primeira experiência. Quando a corrente na bobina da esquerda aumenta, por exemplo quando a chave é ligada, o fluxo de $\vec{B}$ através da bobina da direita aumenta e surge uma corrente induzida na bobina da direita.

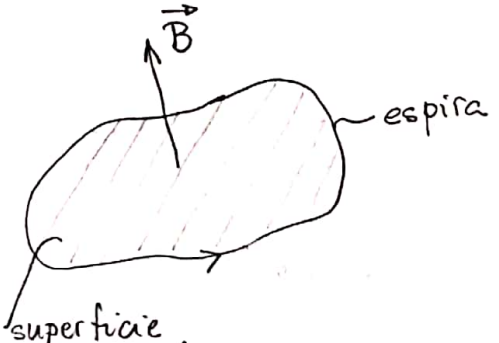


Se a corrente na bobina da esquerda diminui, por exemplo quando a chave é desligada, o fluxo de $\vec{B}$ através da bobina da direita diminui e surge uma corrente nela no sentido oposto.

A LEI DE FARADAY

Considere uma espira imersa em um campo magnético $\vec{B}$. A lei de Faraday, ou lei da indução, afirma que se houver uma variação no fluxo do campo magnético através da área delimitada pela espira, então surgirá uma fem induzida na espira, dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$



Se a resistência da espira for R haverá uma corrente induzida circulando nela, dada por

$$I = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Digitalizado com CamScanner

CONVENÇÃO DE SINAIS

Ao aplicar a lei de Faraday é necessário definir sentidos positivos para o fluxo do campo magnético e para a fem. Isto é feito da seguinte maneira.

Primeiro escolhe-se um sentido positivo para a área da espira. Por exemplo, pode-se escolher $\vec{A}$ no sentido de $\vec{B}$, de forma que o fluxo seja positivo. Tendo escolhido o sentido positivo para $\vec{A}$, usa-se a regra da mão direita para definir o sentido positivo da fem, e consequentemente da corrente induzida.

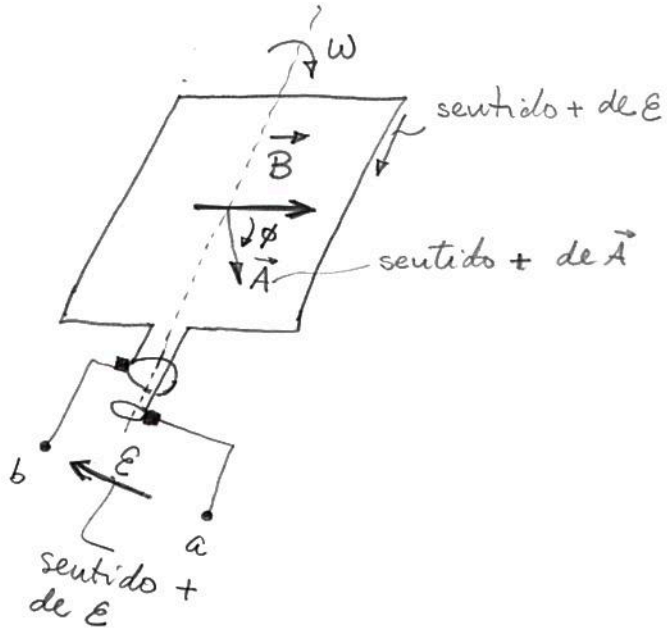


Se ao aplicar a lei de Faraday você obtiver $\mathcal{E}$ positivo, a fem tem o sentido + que você obteve pela regra da mão direita. Se você obtiver $\mathcal{E}$ negativo, a fem terá sentido contrário ao sentido + de $\mathcal{E}$.

Nota: a lei de Faraday afirma que $\mathcal{E}$ tem sinal oposto a $d\Phi_B/dt$ e não a Φ_B.

ALTERNADOR SIMPLES (Ex. 29.4)

Uma espira gira com velocidade angular ω em torno da linha pontilhada, fazendo surgir uma fem. O campo magnético é uniforme e aponta para a direita.



Use a regra da mão direita para se convencer que os sentidos positivos de $\vec{A}$ e $\mathcal{E}$ são coerentes.

O fluxo de $\vec{B}$ é dado por

$$\Phi_B = BA\cos\phi$$

Fazendo $\phi = \omega t$, temos

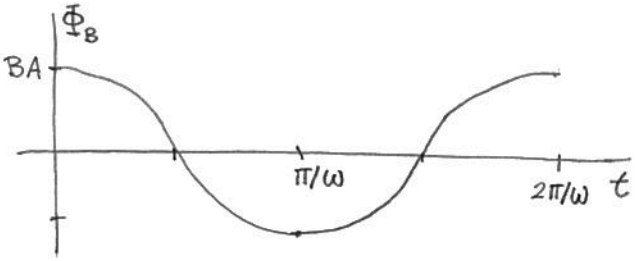
$$\Phi_B = BA\cos\omega t$$

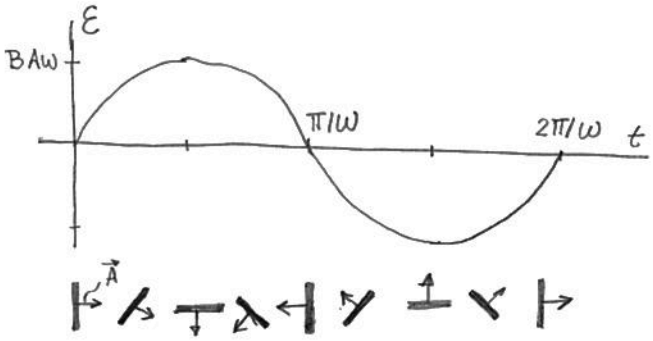
De acordo com a lei de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BA\omega \operatorname{sen}\omega t$$

Os gráficos abaixo mostram

como Φ_B e $\mathcal{E}$ variam no tempo e também as inclinações instantâneas da espira

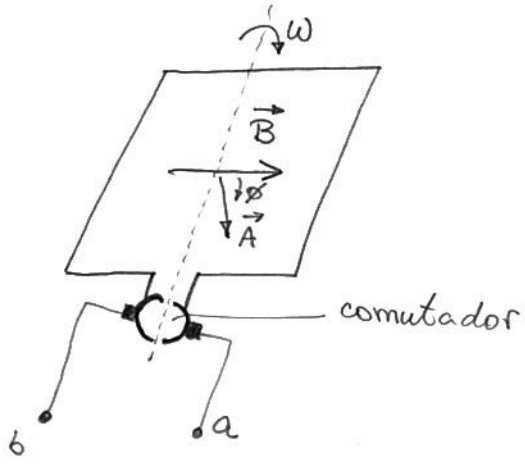




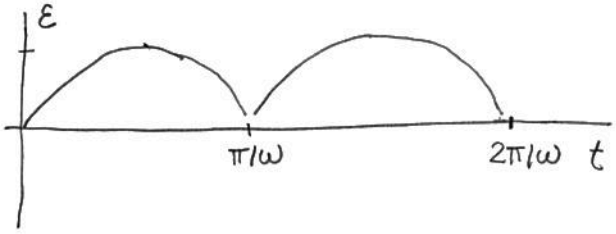
A fem induzida na espira pode ser conectada a um circuito externo ligado nos pontos a e b. Ela varia senoidalmente no tempo e por isso o alternador é chamado de gerador de corrente alternada (ac)

GERADOR DC

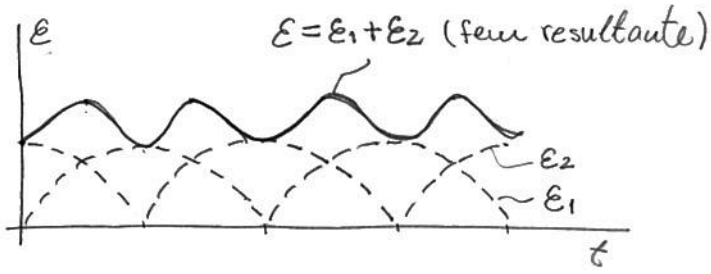
O arranjo com anel dividido em duas partes da figura abaixo é chamado comutador. Ele faz inverter as conexões no circuito quando a fem na bobina inverte o sinal. Assim a fem no circuito externo tem sempre o mesmo sinal.



O gráfico da fem no circuito externo é



Um gerador com duas bobinas colocadas em série e com planos defasados de 90° pode ser usado para gerar uma fem como a dd figura abaixo



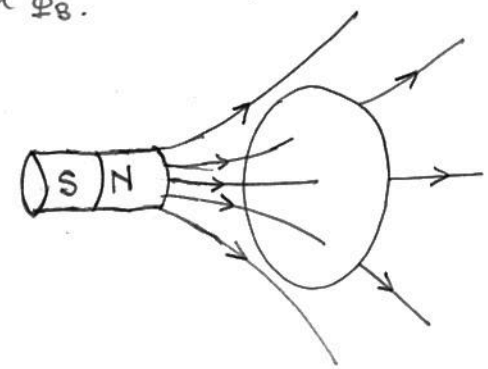
Tendo várias bobinas pode-se obter uma fem resultante praticamente constante que produzirá uma corrente contínua no circuito externo, chamada corrente dc.

A LEI DE LENZ

A lei de Lenz é uma forma alternativa de interpretar o sinal − da lei de Faraday. Ela afirma que "a corrente e a fem induzidas têm o sentido que contraria a variação que as produziu". A variação pode ser uma mudança em Φ_B, o deslocamento do circuito, etc.

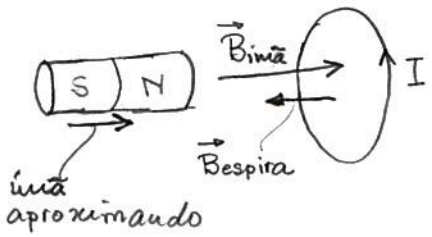
Como exemplo considere um ímã se movendo em relação a uma espira.

(1) Primeiro vamos interpretar a lei de Lenz supondo que a variação que produz a corrente seja a mudança em Φ_B.



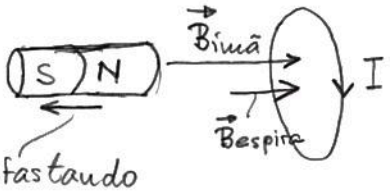
(1a) Ímã se aproximando.

Se o ímã se aproxima da espira, Φ_B aumenta. A corrente induzida deve se opor ao aumento de Φ_B. Para isto ela deve produzir um campo magnético próprio no sentido oposto ao campo magnético do ímã. Para que o campo produzido pela espira seja contrário ao do ímã, a corrente deve ter o sentido indicado na figura abaixo.



(1b) Ímã se afastando

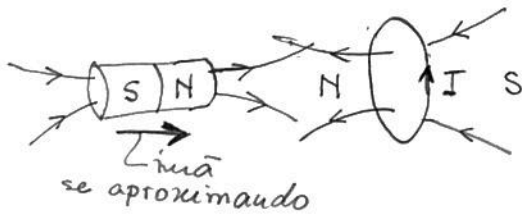
Se o ímã estiver se afastando, Φ_B estará diminuindo. A corrente induzida deverá produzir um campo magnético próprio no mesmo sentido do campo do ímã para contrariar a diminuição de Φ_B. O sentido de I é mostrado na figura abaixo.



(2) De forma alternativa podemos pensar que a variação que produz a corrente é a aproximação ou o afastamento do ímã.

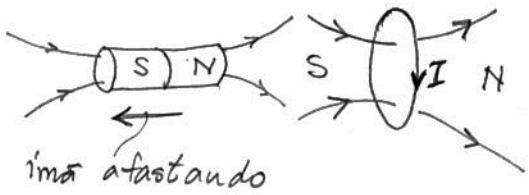
(2a) Ímã se aproximando

A própria espira se comporta como um ímã. Ela deve repelir o ímã para contrariar a aproximação. Assim o polo N da espira deve estar próximo ao polo N do ímã, de forma que I deve ter o sentido indicado na figura abaixo.



(26) Ímã se afastando

A bobina deve atrair o ímã para contrariar o seu afastamento. Para isto o polo S da bobina deve ficar próximo ao polo N do ímã.



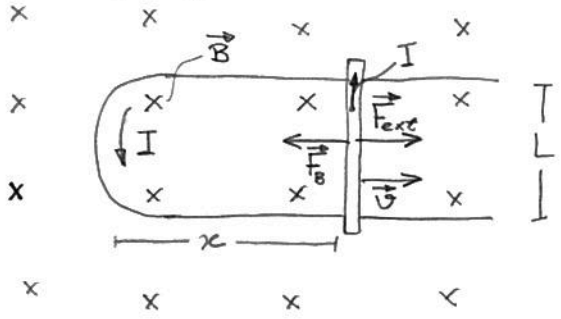
LEI DE LENZ E CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

A lei de Lenz está diretamente relacionada com a conservação da energia. Para entender isto, imagine por um momento que o sentido da corrente induzida fosse contrário ao que realmente é. Então bastaria dar um leve toque no ímã na direção da espira para criar uma força atrativa entre eles. Quanto mais aumentasse a velocidade de aproximação, maior seria a força atrativa. Assim o ímã ganharia energia cinética sem que nenhum trabalho externo tivesse sido realizado, contrariando o princípio da conservação da energia.

Considerando o sentido correto para a corrente, chegamos à conclusão que um agente externo deve empurrar o ímã para aproximá-lo ou afastá-lo da espira. Portanto tem que realizar um trabalho. A energia fornecida pelo agente externo se transforma em calor na espira (através do efeito Joule), de acordo com o princípio da conservação da energia. O exemplo a seguir mostra isto de forma quantitativa.

GERADOR COM HASTE DESLIZANTE (Exs. **29.6** e **29.7**)

Uma haste com resistência R se desloca sobre um trilho em forma de U, de resistência desprezível. Um campo magnético uniforme $\vec{B}$ aponta para dentro da página e um agente externo puxa a haste para a direita com velocidade constante de módulo v. A haste tem comprimento L.



Adotando a convenção de que o sentido + de $\vec{A}$ é para dentro, o sentido + de $\mathcal{E}$ e I é horário.

Φ_B é positivo e dado por

$$\Phi_B = BLx$$

De acordo com a lei de Faraday a fem induzida é dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -BL\frac{dx}{dt} = -BLv$$

A corrente induzida é

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{BLv}{R}$$

O sinal − em $\mathcal{E}$ e I indica que $\mathcal{E}$ e I são contrários ao sentido + destas grandezas, ou seja, são no sentido anti-horário. Este sentido também pode ser obtido pela lei de Lenz.

(1) Interpretação em termos de Φ_B.

se a barra se move para a direita, Φ_B aumenta. Então I deve criar um campo para fora para contrariar o aumento de Φ_B. Assim, I deve ser no sentido anti-horário.

(2) Interpretação em termos da força.

se a barra se move para a direita, deve surgir uma força magnética sobre ela para a esquerda, de modo a contrariar o movimento. Para que a força magnética (dada por $\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B}$) seja para a esquerda, a corrente na barra deve ser para cima, ou seja, a corrente no circuito deve ser no sentido anti-horário

BALANÇO ENERGÉTICO.

A força sobre a barra é dada por

$$\vec{F}_B = I\vec{L}\times\vec{B}$$

onde $\vec{L}$ aponta para cima. Assim

$$F_B = ILB = \frac{B^2L^2v}{R}$$

para a esquerda. Para que $\vec{v}$ seja constante, um agente externo deve puxar a barra para a direita com uma força de módulo

$$F_{ext} = \frac{B^2L^2v}{R}$$

A potência fornecida pelo agente externo é dada por

$$P_{ext} = \vec{F}_{ext}\cdot\vec{v} = F_{ext}v = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

As potências na fem e no resistor são

$$P_\mathcal{E} = \mathcal{E}I = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

e

$$P_R = RI^2 = \frac{B^2L^2v^2}{R}$$

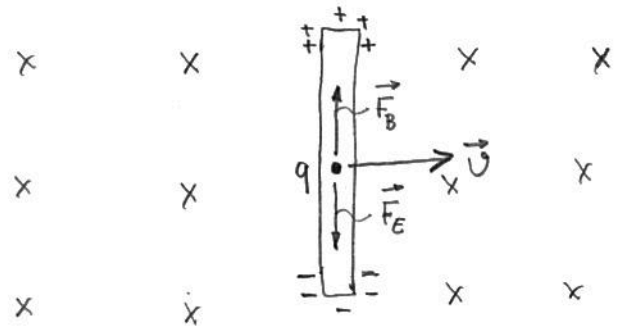
O fato de que $P_{ext} = P_\mathcal{E} = P_R$

está em perfeito acordo com o princípio da conservação da energia: o agente externo realiza um trabalho que é transformado em energia elétrica, que é transformada em calor.

FEM E FORÇA MAGNÉTICA

No caso de um circuito que se move em relação a um campo magnético é possível interpretar a fem induzida em termos da força magnética.

Por exemplo, considere uma barra se deslocando para a direita com velocidade v em uma região onde há um campo magnético uniforme entrando na página.



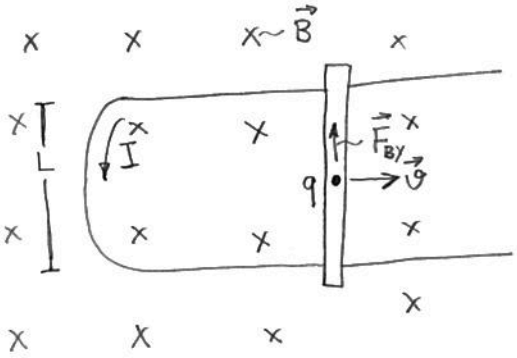
A força magnética sobre uma carga q (suposta positiva) é dada por

$$F_B = qvB$$

e aponta para cima. Cargas positivas se deslocarão para cima (ou cargas negativas para baixo) até que surja um campo elétrico de cima para baixo cuja força sobre uma carga da barra cancela a força magnética. Em módulo, devemos ter

$$qE = qvB \Rightarrow E = vB.$$

Se a barra se deslocar sobre um trilho condutor em forma de U, as cargas circularão em vez de se acumularem nas extremidades da barra.



Surge uma fem induzida na barra dada por

$$\mathcal{E} = \frac{W_q}{q}$$

onde W_q é o trabalho realizado sobre a carga q.

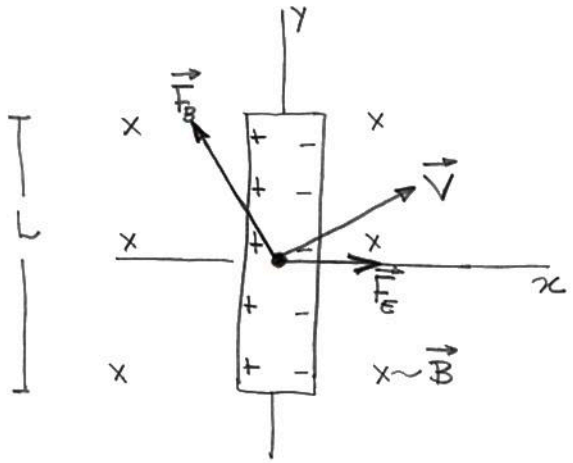
CÁLCULO DE W_q

No sistema de coordenadas abaixo a velocidade da carga é dada por

$$\vec{v} = v\hat{i} + v_d\hat{j}$$

onde v_d é a velocidade de arraste. A força magnética sobre a carga é dada por

$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$$
$$= q(v\hat{i} + v_d\hat{j})\times(-B\hat{k})$$
$$= -qv_dB\hat{i} + qvB\hat{j}$$



A potência fornecida pela força magnética é

$$P_B = \vec{F}_B \cdot \vec{V}$$

$$= (-q v_d B \hat{i} + q v B \hat{j}) \cdot (v \hat{i} + v_d \hat{j}) = 0$$

Como esperado, a força magnética não realiza trabalho. De fato, quem realiza trabalho sobre a carga é uma força elétrica. Considerando que os portadores têm carga positiva, podemos concluir que a componente x de $\vec{F}_B$ desloca cargas positivas para o lado esquerdo da barra até surgir um campo elétrico apontando para a direita que produz uma força que cancela a componente x da força magnética. Então

$$\vec{F}_E = q v_d B \hat{i}$$

A potência fornecida pela força elétrica é dada por

$$P_E = \vec{F}_E \cdot \vec{V} = q v_d B v$$

Se a carga gasta um tempo t para percorrer a barra, então o trabalho realizado sobre ela é

$$W_q = P_E t = q v_d B v t$$

Como $v_d t = L$,

$$W_q = q v B L$$

Assim a fem é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{W_q}{q} = v B L$$

que é o mesmo resultado obtido na pag 7 através da Lei de Faraday.

Obs. Como $\vec{F}_E$ cancela a componente x de $\vec{F}_B$ pode-se também interpretar que é a componente y de $\vec{F}_B$ que realiza o trabalho:

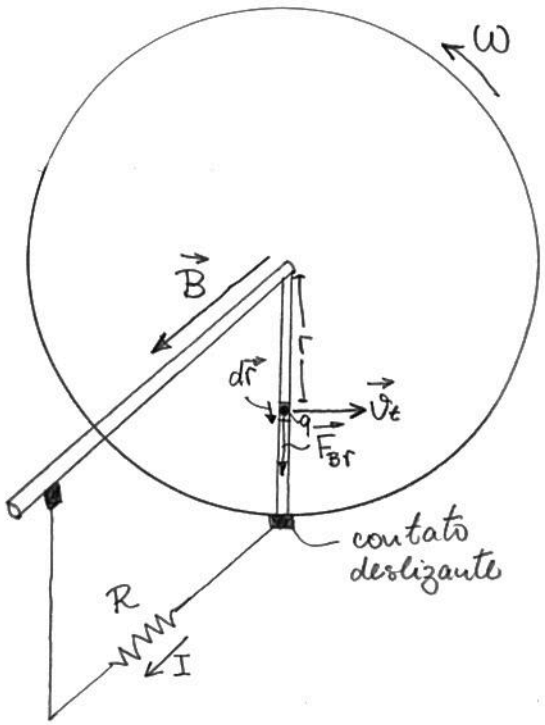
$$W_q = F_{By} L = q v B L$$

Mas tenha em mente que o trabalho de $\vec{F}_B$ como um todo é zero.

Também deve-se observar aqui que nem sempre é possível associar a fem induzida a uma força magnética. Esta associação só é possível quando o circuito é móvel e o campo magnético é constante no tempo.

DISCO DE FARADAY

Um disco metálico, colocado com seu plano perpendicular a um campo magnético gira em torno do seu eixo (paralelo a $\vec{B}$). Isto faz surgir uma fem induzida entre o centro e a periferia do disco.



Considere uma carga q (suposta positiva) situada a uma distância r do centro do disco. A velocidade tangencial da carga é

$$v_t = \omega r$$

e aponta para a direita. Esta velocidade tangencial dá origem a uma força magnética sobre a carga, na direção radial, dada por

$$F_{Br} = qvB = q\omega rB$$

apontando para fora. Portanto há uma fem no elemento de comprimento dr da figura dada por

$$d\varepsilon = \frac{dW_q}{q} = \frac{F_{Br}\,dr}{q} = \omega B r\,dr$$

A fem entre o centro e a periferia do disco é

$$\varepsilon = \int d\varepsilon = \omega B \int_0^a r\,dr = \frac{\omega B a^2}{2}$$

onde a é o raio do disco.

Obs. Como no exemplo anterior, é uma força elétrica que realiza trabalho mas o mesmo resultado pode ser obtido considerando o trabalho da componente radial de $\vec{F}_B$.

Conectando o eixo à periferia, haverá uma corrente dada por

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R}$$

de forma que a potência da fem é

$$P_\varepsilon = \varepsilon I = \frac{\omega^2 B^2 a^4}{4R}$$

Como a força magnética radial sobre uma carga q suposta positiva, é para fora, a corrente tem o sentido mostrado na figura.

Além desta força radial, há também uma força tangencial atuando sobre o elemento de comprimento $d\vec{r}$ dada por

$$d\vec{F}_{Bt} = I\, d\vec{r} \times \vec{B}$$

Ela é dada em módulo por

$$dF_{Bt} = I B dr$$

e aponta para a esquerda. Esta força tangencial dá origem a um torque

$$d\vec{\tau}_B = \vec{r} \times d\vec{F}_{Bt}$$

cujo módulo é

$$d\tau_B = r\, dF_{Bt} = IBr\, dr$$

e tende a girar o disco no sentido contrário à sua velocidade angular. Isto está em acordo com a lei de Lenz que afirma que o torque tende a contrariar a rotação do disco.

Em módulo, o torque magnético é dado por

$$\tau_B = IB\int_0^a r\, dr = \frac{IBa^2}{2}$$

Substituindo I, obtemos

$$\tau_B = \frac{\omega B^2 a^4}{4R}$$

Um agente externo teria que aplicar um torque de módulo

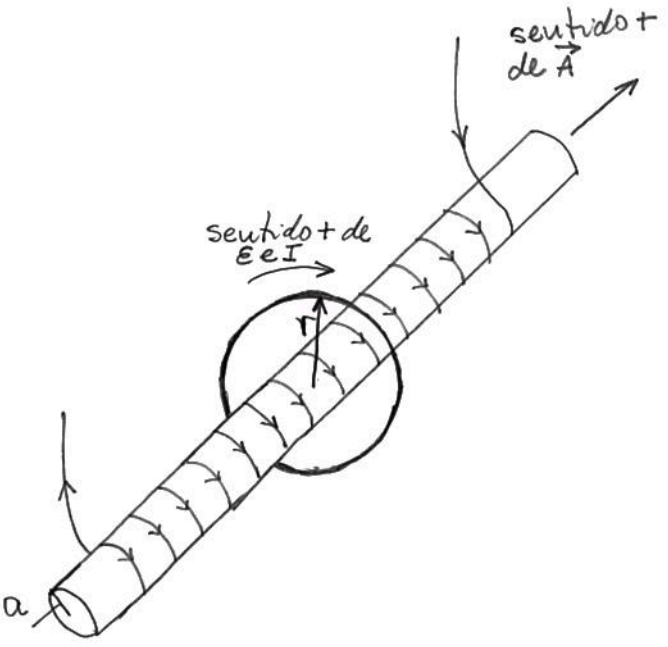
$$\tau_{ext} = \frac{\omega B^2 a^4}{4R}$$

no sentido da velocidade angular para manter o disco girando. A potência fornecida pelo agente externo é dada por

$$P_{ext} = \tau_{ext}\,\omega = \frac{\omega^2 B^2 a^4}{4R}$$

que é igual a $P_\mathcal{E}$, de acordo com o princípio da conservação da energia.

CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO



Considere um solenóide comprido, de raio a, que conduz uma corrente variável, circundado por uma espira condutora de raio r (r > a).

Vamos escolher o sentido + de $\vec{A}$ como mostra a figura,

de forma que o sentido + de $\mathcal{E}$ e I é horário.

O fluxo de $\vec{B}$ é

$$\Phi_B = BA = \mu_0 n I \cdot \pi a^2$$

e a fem induzida é

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n \pi a^2 \frac{dI}{dt}$$

Se dI/dt for positivo, $\mathcal{E}$ é negativo, e portanto no sentido anti-horário.

Se a resistência da espira for R, haverá uma corrente nela dada por

$$I_{ind} = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\mu_0 n \pi a^2}{R} \frac{dI}{dt}$$

Associado à fem há um campo elétrico induzido, tal que

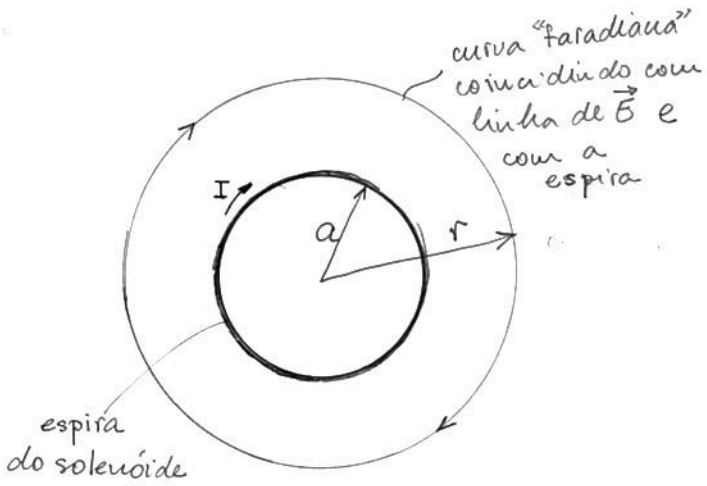
$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Por simetria, $\vec{E}$ deve apontar na direção tangente à espira.

CÁLCULO DE $\vec{E}$ $(r > a)$.

Vamos aplicar a equação acima (lei de Faraday) a uma curva "faradiana" que coincide com a espira e com uma linha de campo elétrico.

Vamos circular no sentido horário



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint E\, dl = E \oint dl = E 2\pi r$$

Da lei de Faraday

$$E 2\pi r = -\mu_0 n \pi a^2 \frac{dI}{dt}$$

$$E = -\frac{\mu_0 n a^2}{2r} \frac{dI}{dt}$$

Se $dI/dt > 0$, E é negativo e portanto as linhas de $\vec{E}$ são no sentido anti-horário.

Agora podemos trocar a espira condutora por uma circunferência imaginária. Neste caso, como não há condutor, não há corrente induzida mas continua havendo a fem e o campo elétrico induzido. Uma carga de prova colocada próxima ao solenóide sofrerá uma força elétrica dada por $\vec{F}_e = q\vec{E}$, o que confirma a existência do campo elétrico.

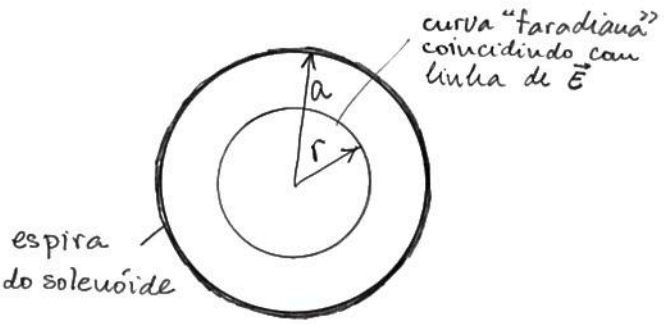
CÁLCULO DE $\vec{E}$ ($r<a$).

Há também um campo elétrico induzido dentro do solenóide. Para calculá-lo vamos aplicar a lei de Faraday à curva circular de raio r ($r<a$) que coincide com uma linha de $\vec{E}$. Novamente devemos ter

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E\,2\pi r$$

mas agora

$$\Phi_B = \mu_0 n I\cdot \pi r^2$$



Da lei de Faraday

$$E\,2\pi r = -\frac{d}{dt}(\mu_0 n I \pi r^2)$$

$$E = -\frac{\mu_0 n r}{2}\frac{dI}{dt}$$

CAMPO ELETROSTÁTICO E CAMPO ELÉTRICO INDUZIDO

O campo eletrostático é conservativo (vamos chamá-lo de $\vec{E}_c$) e portanto obedece à equação

$$\oint \vec{E}_c\cdot d\vec{\ell} = 0$$

Por outro lado, o campo elétrico induzido (vamos chamá-lo de $\vec{E}_n$) obedece à equação

$$\oint \vec{E}_n\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

No caso destes dois campos existirem simultaneamente, o campo elétrico resultante é dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_n$$

e obedece à equação (soma das duas eqs. acima)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Portanto o campo elétrico resultante obedece à lei de Faraday.

O campo eletrostático obedece à lei de Gauss

$$\oint \vec{E}_c\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

As linhas de $\vec{E}_n$ são sempre fechadas porque este campo não é gerado por cargas elétricas. Assim

$$\oint \vec{E}_n\cdot d\vec{A} = 0$$

Somando as duas equações, obtemos

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

de forma que o campo resultante obedece à lei de Gauss.

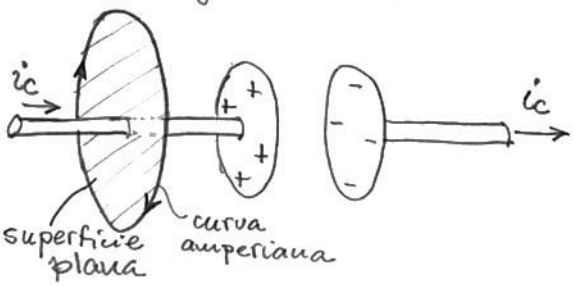
CORRENTE DE DESLOCAMENTO

A lei de Ampère como apresentada anteriormente mostra uma contradição quando aplicada a um capacitor sendo carregado.

Quando aplicada à curva fechada que delimita a área plana da fig abaixo, a lei de Ampère nos leva a

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c$$

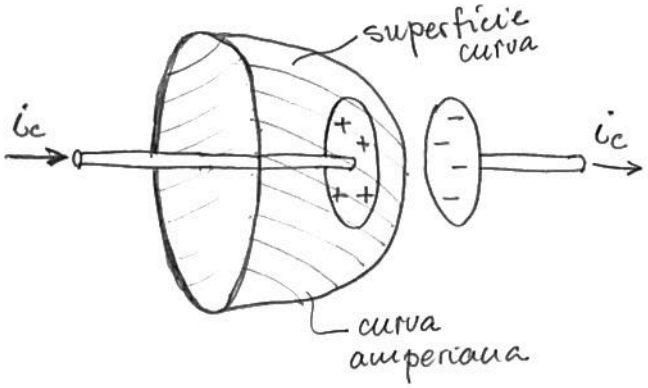
onde i_c é a corrente no fio que carrega o capacitor.



Agora considere a mesma curva fechada delimitando a área em forma de "coador de café". Neste caso

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

porque nenhuma corrente atravessa a superfície.



Há uma clara contradição e para eliminá-la J. C. Maxwell postulou a existência de uma corrente extra na lei de Ampère, chamada corrente de deslocamento. Assim a nova lei de Ampère é escrita como

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_{c,int} + i_{d,int})$$

onde i_c é a corrente de condução (que já existia) e i_d a corrente de deslocamento. A idéia é que dentro do capacitor i_d substitua i_c. Como a carga no capacitor é

$$q = CV = \frac{\epsilon_0 A}{d} Ed = \epsilon_0 AE = \epsilon_0 \Phi_E$$

↳ supondo o capacitor no vácuo.

onde $\Phi_E = EA$ é o fluxo de $\vec{E}$ de uma placa à outra, podemos escrever

$$i_c = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Maxwell postulou que

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

de forma que a lei de Ampère é escrita como

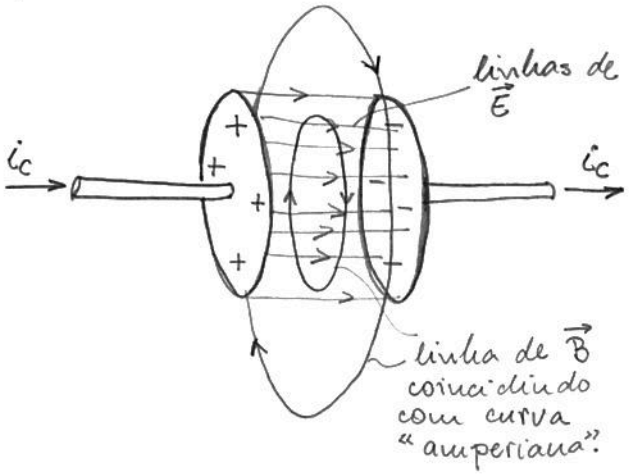
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{c,int} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Escrita nesta forma, a lei de Ampère leva ao mesmo resultado quando usamos a superfície plana ou a superfície curva. Para a superfície plana, $i_{c,int} = i_c$ e $i_{d,int} = 0$. Para a superfície curva $i_{c,int} = 0$ e $i_{d,int} = i_c$.

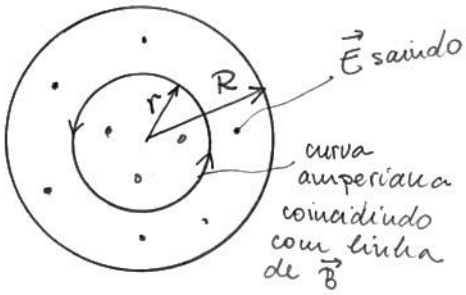
Associada à corrente de deslocamento há uma densidade de corrente de deslocamento dada por

$$\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt}$$

CÁLCULO DE $\vec{B}$ NO INTERIOR DO CAPACITOR



(a) $r \leq R$.



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \oint B\, d\ell = B \oint d\ell = B 2\pi r$$

$$j_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{\pi R^2}\right)$$

$$j_d = \frac{i_c}{\pi R^2}$$

$$i_{d,int} = j_d \pi r^2 = i_c \frac{r^2}{R^2}$$

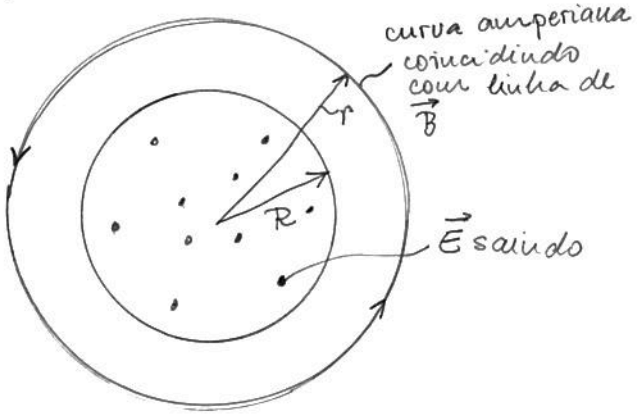
Obviamente $i_{c,int} = 0$.

Da lei de Ampère

$$B 2\pi r = \mu_0 i_c \frac{r^2}{R^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 i_c r}{2\pi R^2}$$

(b) $r > R$.



De novo, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = B 2\pi r$

mas agora

$$i_{d,int} = j_d \pi R^2 = i_c$$

Portanto

$$B = \frac{\mu_0 i_c}{2\pi r}$$

Experimentalmente, pode-se medir o campo magnético induzido (devido à corrente de deslocamento) o que confirma a existência do termo extra na lei de Ampère. A inclusão deste termo é fundamental para a existência de ondas eletromagnéticas que serão estudadas no capítulo 32.

EQUAÇÕES DE MAXWELL

Neste ponto já podemos escrever as quatro equações que descrevem as relações entre os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ e suas fontes, conhecidas como equações de Maxwell. Na verdade, Maxwell não é o autor das quatro equações, ele apenas introduziu o termo de corrente de deslocamento na lei de Ampère. Contudo foi ele quem analisou pela primeira vez o conjunto das quatro equações nas formas definitivas, prevendo uma série de fenômenos eletromagnéticos, dentre os quais o fato da luz ser uma onda eletromagnética. As quatro equações de Maxwell no vácuo são:

1) Lei de Gauss

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

2) Lei de Gauss do magnetismo (ou ausência de monopolos magnéticos)

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

3) Lei de Ampère

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{int} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

4) Lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

A carga elétrica total no interior de uma superfície fechada é dada por

$$Q_{int} = \int_V \rho\, d\vartheta$$

Por sua vez, os fluxos de $\vec{j}$, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ através de uma superfície são

$$I_{int} = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

Assim as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho\, d\vartheta$$ V é o volume delimitado pela superfície S

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\int_S \vec{j}\cdot d\vec{A} + \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}$$ S é a superfície delimitada pela curva fechada C.

Na ausência de fontes ($\rho = 0$ e $\vec{j} = 0$), temos

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0 \qquad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d}{dt}\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A}$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{A}$$

A penúltima equação mostra que um campo elétrico variável no tempo gera um campo magnético e a última que um campo magnético variável no tempo gera um campo elétrico. Estes campos podem se propagar no espaço, um gerando o outro, dando origem às ondas eletromagnéticas, que serão estudadas mais à frente. A luz visível, ondas de rádio e TV, raios X, etc. são casos especiais destas ondas.

Finalmente, devemos dizer que a descrição completa dos fenômenos eletromagnéticos é dada pelas quatro equações de Maxwell mais a lei de força de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

que diz como os campos atuam sobre as cargas elétricas (em repouso ou em movimento).

PROBLEMAS: VELHO (NOVO)

12(15), 13(17), 19(26), 23(30), 33(47), 34(50), 35(53), 36(7), 37(55), 38(60), 39(61), 41(63), 43(65), 45(67), 46(69)
69 do cap. anterior (72),
70 do cap anterior (73) – neste último $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$ estão faltando no livro novo.

Respostas:

12(15) (a) anti-horário; (b) horário; (c) não há corrente induzida

36(7) (c) $\frac{\mu_0 i L}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$

38(60) (a) $B_0 \pi r_0^2 \left[1 - 3\left(\frac{t}{t_0}\right)^2 + 2\left(\frac{t}{t_0}\right)^3\right]$

(b) 0,0665 V para a direita no resistor; (c) 10,2 Ω; (d) −0,0676 V para a esquerda no resistor; (e) $t = t_0 = 0{,}01$ s.

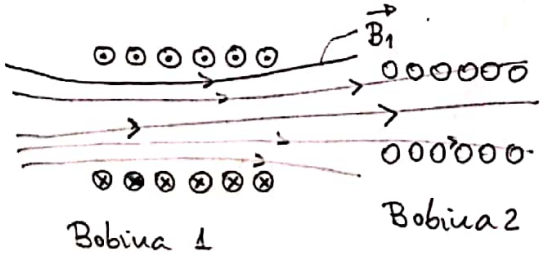
10. INDUTÂNCIA

INDUTÂNCIA MÚTUA

Considere duas bobinas vizinhas. Suponha que a bobina 1 possua N_1 espiras e transporte uma corrente variável i_1. Então haverá uma fem induzida na bobina 2, dada por

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt}$$

onde N_2 é o número de espiras da bobina 2 e Φ_{B2} é o fluxo de $\vec{B}$ em cada uma destas espiras.



O fluxo na bobina 2 é gerado pelo campo $\vec{B}_1$ produzido pela bobina 1 e este campo é proporcional a i_1. Consequentemente Φ_{B2} também é proporcional a i_1. Esta proporcionalidade é escrita como

$$N_2 \Phi_{B2} = M_{21} i_1$$

onde M_{21} é uma constante, chamada indutância mútua. No vácuo, M_{21} só depende de fatores geométricos: tamanhos e formas das bobinas, número de espiras de cada uma, distância entre elas, orientação relativa. Na presença de materiais magnéticos a indutância mútua também depende das propriedades magnéticas do material.

Da definição acima podemos escrever:

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1}$$

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Agora imagine que há uma corrente variável i_2 na bobina 2. Haverá uma fem induzida na bobina 1, dada por

$$\mathcal{E}_1 = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

onde

$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{B1}}{i_2}$$

sendo Φ_{B1} o fluxo na bobina 1 devido ao campo produzido pela corrente da bobina 2.

Pode-se mostrar que

$$M_{12} = M_{21}$$

de forma que vamos adotar a notação mais simples

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{B1}}{i_2}$$

Digitalizado com CamScanner

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt}$$

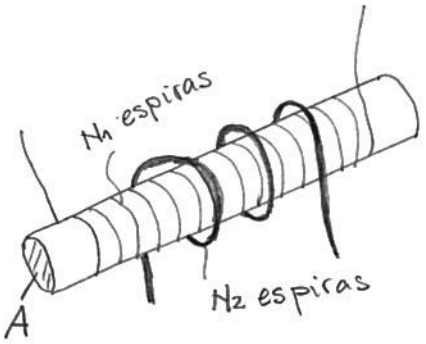
$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt}$$

A unidade de indutância no SI é o

$$\text{henry (H)} = \frac{\text{weber (Wb)}}{\text{ampère (A)}}$$

BOBINA DE TESLA (Ex. 30.1)

Uma bobina com N_2 espiras está enrolada em torno de um solenóide longo, de comprimento l, com área de seção transversal A e N_1 espiras.



Vamos supor uma corrente i_1 no solenóide. Assim o campo magnético no interior do solenóide é dado por

$$B_1 = \mu_0 n_1 i_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{l}$$

O fluxo através de cada espira da bobina 2 é

$$\Phi_{B2} = B_1 A = \frac{\mu_0 N_1 i_1 A}{l}$$

e a indutância mútua é

$$M = \frac{N_2 \Phi_{B2}}{i_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{l}$$

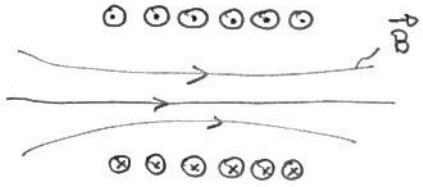
Note que M depende apenas dos fatores geométricos N_1, N_2, A e l.

A indutância é sempre dada por

$$M = \mu_0 \times \left[\begin{array}{l}\text{algo com dimensão}\\ \text{de comprimento}\end{array}\right]$$

AUTO-INDUTÂNCIA

Considere agora uma única bobina com N espiras conduzindo uma corrente variável i



Há uma fem induzida na bobina dada por

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Em analogia com a indutância mútua, define-se a auto-indutância (ou simplesmente indutância) da bobina como

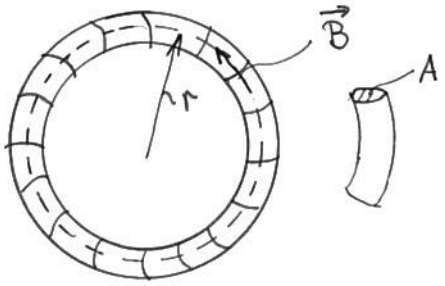
$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

de forma que

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$$

AUTO-INDUTÂNCIA DE UM TORÓIDE

Considere um toróide fino e comprido, com raio médio r e área de seção transversal A, e N espiras.



Supondo B cte no interior do toróide

$$\Phi_B \simeq BA = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} A$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \simeq \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r}$$

Note que L depende somente dos fatores geométricos N, A e r e que

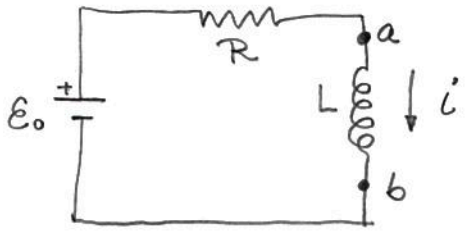
$L = \mu_0 \times$ [comprimento]

INDUTORES

Um dispositivo de um circuito que possui uma dada indutância é chamado indutor e representado pelo símbolo



Suponha que um indutor faça parte de um circuito, como o da figura abaixo.

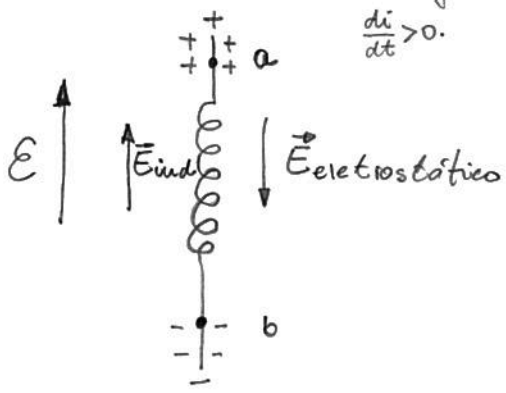


Para aplicar a lei das malhas devemos saber a ddp entre os pontos a e b. Se i for variável haverá uma fem no indutor dada por

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$$

Se di/dt for positivo, $\mathcal{E}$ é negativo, ou seja, contrário à corrente. Esta fem provoca um deslocamento de cargas como na figura abaixo. O deslocamento de cargas acontece até que surja um campo eletrostático de cima para baixo que cancela o efeito do campo elétrico induzido.

Na figura supomos $\frac{di}{dt} > 0$.



Então haverá uma ddp entre os pontos a e b dada por

$$V_{ab} = V_a - V_b = L \frac{di}{dt}$$

A aplicação da lei das malhas ao circuito acima nos leva à equação

$$\mathcal{E}_0 - Ri - L \frac{di}{dt} = 0$$

INDUTOR EM MEIO MAGNÉTICO

Em um meio com propriedades magnéticas devemos trocar μ_0 por $K_m \mu_0$, de forma que a indutância fica multiplicada por um fator K_m. No caso de materiais paramagnéticos ou diamagnéticos $K_m \simeq 1$ mas em materiais ferromagnéticos K_m pode ser muito grande. Uma complicação que surge é que em materiais ferromagnéticos a magnetização nem sempre é uma função linear da corrente que a produz. Assim $\vec{B}$ não é proporcional à corrente e a indutância não é uma constante. Ao contrário, L depende de i. Supor que L é constante em geral é uma boa aproximação quando a magnetização é muito menor do que o seu valor de saturação.

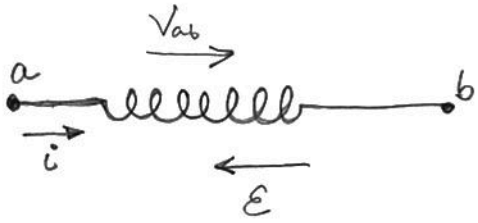
ENERGIA ARMAZENADA EM UM INDUTOR

Analisemos o processo de se estabelecer uma corrente em um indutor. Se a corrente inicial é nula, ela deve aumentar até atingir o seu valor final. À medida que i aumenta surge uma fem induzida dada por

$$\mathcal{E} = -L \frac{di}{dt}$$

que contraria o aumento de i. Para fazer i aumentar, uma fonte externa (uma bateria, por exemplo) deve manter uma ddp entre as extremidades do indutor dada por

$$V_{ab} = -\mathcal{E} = L \frac{di}{dt}$$



Assim a fonte fornece uma potência

$$P_{ext} = V_{ab}\, i = L i \frac{di}{dt}$$

O trabalho realizado pela fonte desde o instante $t=0$ até o instante em que a corrente atinge o seu valor final I é dado por

$$U_B = \int P_{ext}\, dt = \int_0^I L\, i\, di$$

Assim

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2$$

O trabalho realizado pela fonte fica armazenado no indutor na forma de energia potencial. Por exemplo, se a fonte for desligada, a corrente não desaparecerá instantaneamente. Pela lei de Lenz surgirá uma fem que contrariá a diminuição da corrente e a manterá por algum tempo depois que a fonte for desligada.

ENERGIA DO CAMPO MAGNÉTICO

Considere o caso em que o indutor é um toróide, como o do exemplo 30.3. Neste caso

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} I^2$$

Se pensarmos que a energia esteja armazenada no campo magnético, então ela deve estar toda no interior do toróide. Assim a densidade de energia pode ser escrita como

$$u_B = \frac{U_B}{\text{volume}} = \frac{U_B}{2\pi r A}$$

Substituindo U_B, obtemos

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Apesar de ter sido obtida para o caso especial de um toróide ideal, a expressão acima é válida em qualquer situação onde exista um campo magnético. Ela é demonstrada de forma rigorosa em um curso de eletromagnetismo. Perceba a analogia com a densidade de energia do campo elétrico, dada por

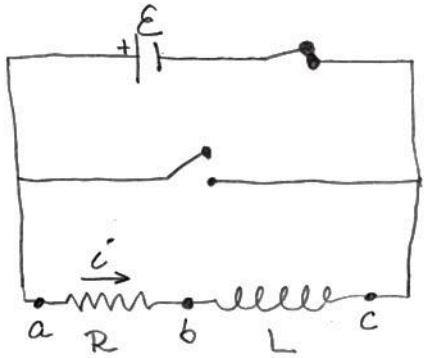
$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

O CIRCUITO RL

Em seguida vamos analisar 3 circuitos onde há um indutor. Inicialmente vamos estudar o circuito da figura abaixo, chamado RL.

(1) Aumento da corrente.

Primeiro vamos supor que a chave do ramo superior seja fechada em $t=0$, de forma que uma corrente seja estabelecida no circuito.



Aplicando a lei das malhas obtemos

$$\mathcal{E} - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{\mathcal{E}}{R}\right)$$

Integrando,

$$\int_0^i \frac{di}{i - \frac{\mathcal{E}}{R}} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

$$\ln\left(i - \frac{\mathcal{E}}{R}\right)\Big|_0^i = -\frac{R}{L}t\Big|_0^t$$

$$\ln\left(\frac{i - \frac{\mathcal{E}}{R}}{-\frac{\mathcal{E}}{R}}\right) = -\frac{R}{L}t$$

Aplicando a exponencial de ambos os lados e isolando i, temos

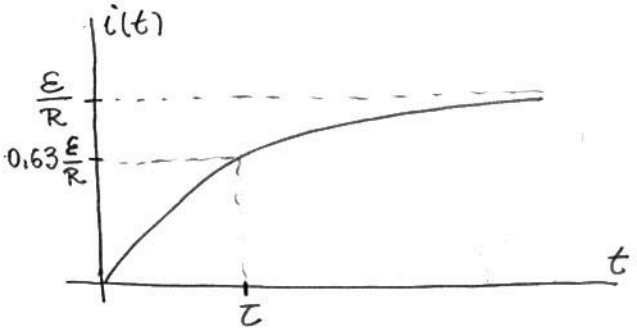
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

A constante $\tau = L/R$ é chamada constante de tempo. Em termos dela

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

A presença do indutor faz com que a corrente não seja estabelecida instantaneamente mas cresça da forma mostrada no gráfico abaixo. Note que para $t = \tau$

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-1}\right) \simeq 0{,}63\frac{\mathcal{E}}{R}$$



A equação diferencial para a corrente também pode ser obtida através da conservação da energia. A potência fornecida pela fem é

$$P_\mathcal{E} = \mathcal{E}i$$

enquanto a potência absorvida pelo indutor é

$$P_L = Li\frac{di}{dt}$$

Por sua vez a potência dissipada no resistor é dada por

$$P_R = Ri^2$$

A conservação da energia exige que

$$P_\mathcal{E} = P_L + P_R$$

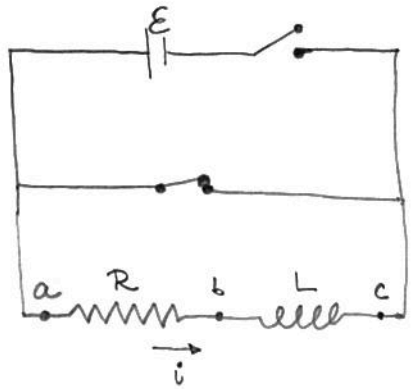
ou

$$\mathcal{E}i = Li\frac{di}{dt} + Ri^2$$

Dividindo por i obtemos a mesma equação obtida pela lei das malhas.

(2) Decrescimo da corrente

Imagine agora que a fem seja desconectada e a chave no ramo do meio fechada em um instante que vamos redefinir como $t=0$.



A lei das malhas nos leva à equação

$$-Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

ou $$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt$$

Integrando,

$$\int_{I_0}^{i} \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt$$

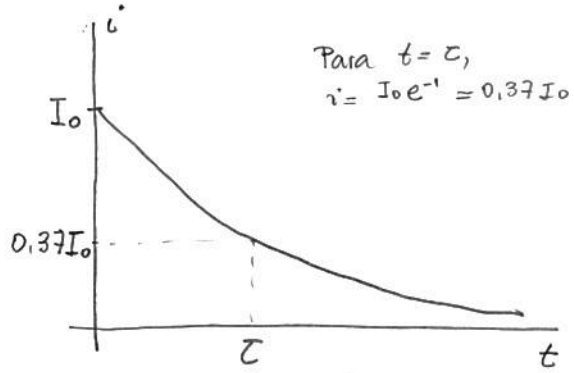
onde I_0 é a corrente em $t=0$

$$\ln\frac{i}{I_0} = -\frac{R}{L}t$$

$$\Rightarrow i = I_0 e^{-Rt/L}$$

Em termos de $\tau = L/R$,

$$i = I_0 e^{-t/\tau}$$

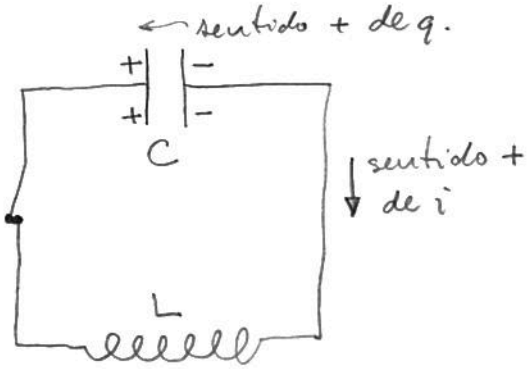


A presença do indutor faz com que a corrente não desapareça instantaneamente.

CIRCUITO LC

Considere um circuito com um indutor e um capacitor. Vamos adotar a convenção de que o sentido + para a carga é com a carga positiva na placa da esquerda e o sentido + de i é no sentido horário. Assim

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$



Da lei das malhas obtemos

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} = 0$$

ou $$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

Esta equação é análoga à equação do oscilador harmônico

simples

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

cuja solução é

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

sendo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Portanto, a solução da eq. diferencial do circuito LC é do tipo

$$q = Q\cos(\omega t + \phi)$$

onde Q é a amplitude de carga no capacitor e

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

A corrente no circuito é dada por

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega Q \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

de forma que ωQ é a amplitude de corrente; ϕ é uma constante de fase que está associada com a situação de q e i em $t=0$.

Por exemplo, se em $t=0$ o capacitor estiver com com carga máxima, então

$$q(t=0) = Q = Q\cos\phi$$

$$\Rightarrow \cos\phi = 1$$

de forma que $\phi = 0$.

Se o capacitor estiver descarregado em $t=0$,

$$q(t=0) = 0 = Q\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = 0,$$

de forma que $\phi = \pi/2$ ou $3\pi/2$.

A energia armazenada no campo elétrico do capacitor varia no tempo de acordo com a equação

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}\cos^2(\omega t + \phi)$$

A energia no campo magnético do indutor é dada por

$$U_B = \frac{Li^2}{2} = \frac{L\omega^2 Q^2}{2}\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$$

Como $\omega = 1/\sqrt{LC}$,

$$L\omega^2 = \frac{1}{C},$$

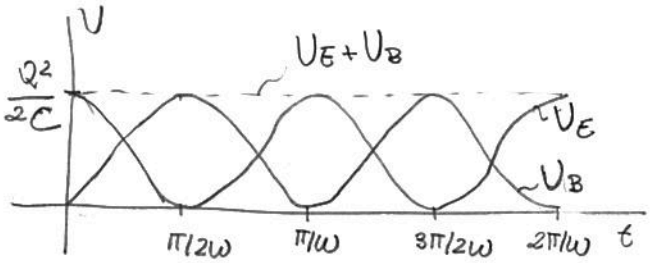
de forma que

$$U_B = \frac{Q^2}{2C}\operatorname{sen}^2(\omega t + \phi)$$

A energia eletromagnética total do circuito é dada por

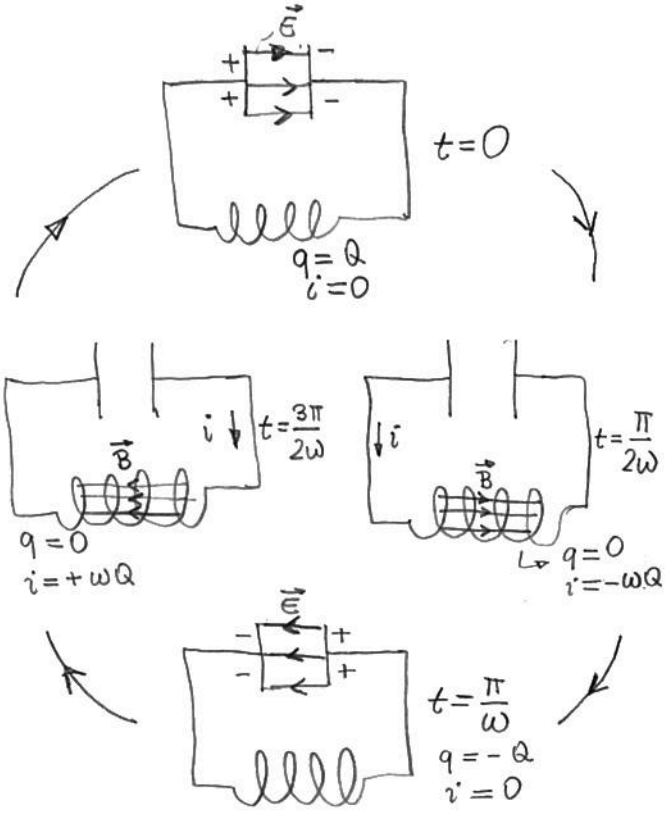
$$U_E + U_B = \frac{Q^2}{2C}$$

A figura abaixo mostra os gráficos de U_E e U_B em função de t para o caso em que $\phi = 0$.



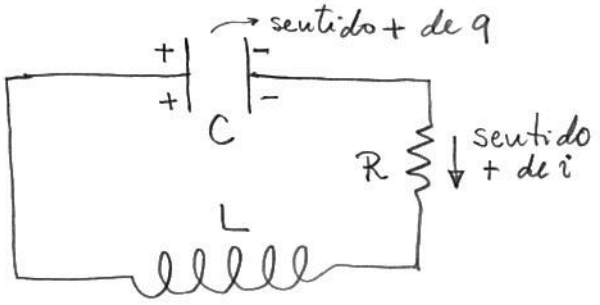
Note que em alguns momentos a energia elétrica é transformada em energia magnética e em outros instantes a transformação se dá no sentido inverso, de forma que a energia total é conservada.

O gráfico abaixo mostra os campos $\vec{E}$ (no capacitor) e $\vec{B}$ (no indutor) em quatro instantes para o caso em que $\phi = 0$



CIRCUITO RLC

Agora vamos considerar o caso real em que a resistência de um circuito LC não pode ser desprezada. A resistência pode estar no próprio indutor ou em um resistor à parte.



Mantendo a convenção de sinais para q e i do circuito LC, obtemos a equação diferencial

$$\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Como $i = dq/dt$ e $di/dt = d^2q/dt^2$, podemos escrever

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

A solução desta equação depende da relação entre R e $\sqrt{L/C}$ (que tem dimensão de resistência). Há três situações distintas:

(1) amortecimento subcrítico

$$R < \sqrt{4L/C}$$

(2) amortecimento crítico

$$R = \sqrt{4L/C}$$

(3) amortecimento supercrítico

$$R > \sqrt{4L/C}$$

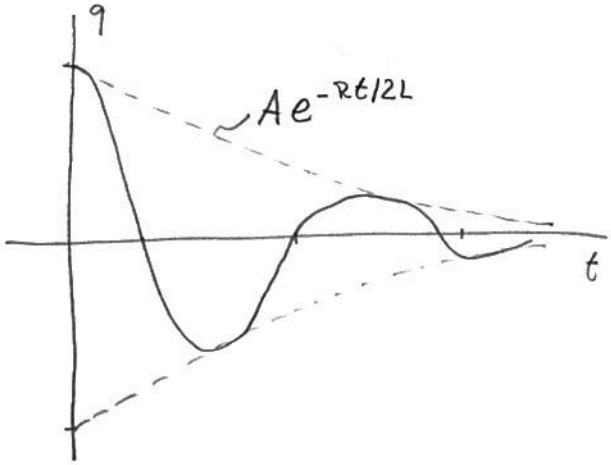
Nos dois últimos casos a resistência dissipa a energia tão rapidamente que não chega a haver oscilação de carga e corrente no circuito. No primeiro caso, a solução é dada por

$$q = Ae^{-Rt/2L}\cos(\omega' t + \phi)$$

onde

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Esta expressão pode ser vista como uma função cosseno com uma amplitude que diminui exponencialmente no tempo.



Note que se $R = 0$, $e^{-Rt/2L} = 1$ e $\omega' = \omega$, de forma que obtemos a solução para o circuito LC.

A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL (LINEAR DE 2º ORDEM)

Vamos supor a solução do tipo

$$q(t) = Ae^{\lambda t}$$

onde λ é um número complexo a ser determinado. Assim

$$\frac{dq}{dt} = \lambda Ae^{\lambda t}, \quad \frac{d^2q}{dt^2} = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

substituindo na eq. diferencial obtemos a eq. do 2º grau para λ

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0$$

cujas soluções são

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

veja que se $R^2 \geq 4L/C$ os λs são reais e não há oscilação.

Admitindo que $R^2 < 4L/C$, podemos escrever

$$\lambda = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{-1 \times \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}\right)}$$

ou $\lambda = -\frac{R}{2L} \pm i\omega'$

a solução geral é combinação das duas soluções particulares.

Assim

$$q(t) = e^{-Rt/2L}\left\{A_1 e^{i\omega' t} + A_2 e^{-i\omega' t}\right\}$$

$$= e^{-Rt/2L}\left\{A_1\cos\omega' t + iA_1 \operatorname{sen}\omega' t + A_2\cos\omega' t - iA_2\operatorname{sen}\omega' t\right\}$$

$$= e^{-Rt/2L}\left\{(A_1 + A_2)\cos\omega' t - i(A_2 - A_1)\operatorname{sen}\omega' t\right\}$$

Para escrever na forma acima é só lembrar que

$$A\cos(\omega' t + \phi) = A\cos\phi\cos\omega' t - A\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega' t$$

e identificar

$$A_1 + A_2 = A\cos\phi \quad (1)$$

$$i(A_2 - A_1) = A\operatorname{sen}\phi \quad (2)$$

PROBLEMAS: VELHO (NOVO)

7(9), 9(11), 12(12), 19(19), 25(23), 21(25), 23(27), 27(31), 26(32), 31(37), 36(42), 39(45), 45(47), 46(48), 47(49), 50(52), 57(67), 41(73), 61(75), 62(78).

Para obter A e ϕ:

$(2) \div (1) \Rightarrow \operatorname{tg}\phi = \dfrac{i(A_2 - A_1)}{A_1 + A_2}$

$(1)^2 + (2)^2 \Rightarrow A^2 = (A_1 + A_2)^2 - (A_2 - A_1)^2 = 4A_1A_2$

$$A = 2\sqrt{A_1A_2}$$

32. CORRENTE ALTERNADA

FONTE DE CORRENTE ALTERNADA (A.C)

Símbolo: 

A voltagem instantânea é dada por

$$v(t) = V \cos \omega t$$

onde V é a amplitude de voltagem e ω a freqüência angular. A freqüência é dada por

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

No Brasil e em muitos países os sistemas de distribuição de energia operam com $f = 60\ Hz$.

CORRENTE ALTERNADA

Vamos supor que a corrente instantânea seja dada por

$$i(t) = I \cos \omega t$$

onde I é a amplitude de corrente

MEDIDA DE CORRENTE ALTERNADA

O galvanômetro de d'Arsonval mede a corrente através de um ponteiro que gira graças a um torque magnético. Se a corrente for alternada com f. grande (tipo 60Hz) o ponteiro não consegue acompanhar a oscilação da corrente e o galvanômetro não pode medi-la.

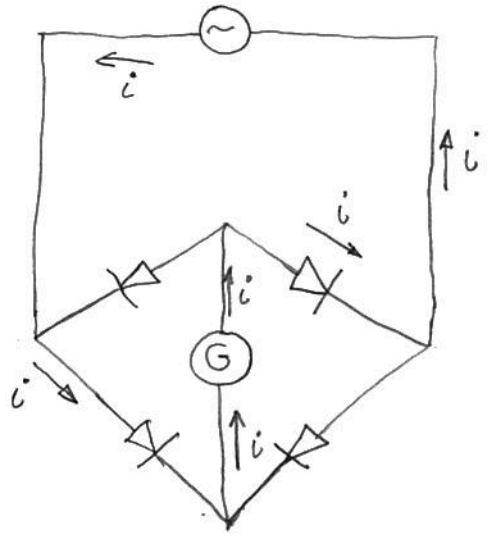
Pode-se usar um retificador de onda completa para medir uma corrente alternada. Para isto usa-se um diodo que é um dispositivo que deixa a corrente passar em um único sentido. O símbolo



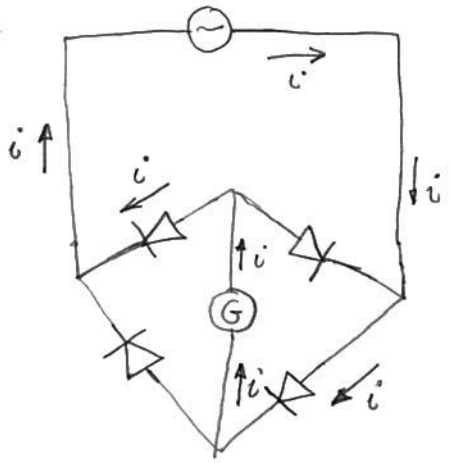
indica que a corrente só passa para a direita.

RETIFICADOR DE ONDA COMPLETA

A figura abaixo mostra que quando i é para a esquerda na fonte, a corrente em G é para cima.



Quando i é para a direita na fonte, a corrente em G também é para cima.



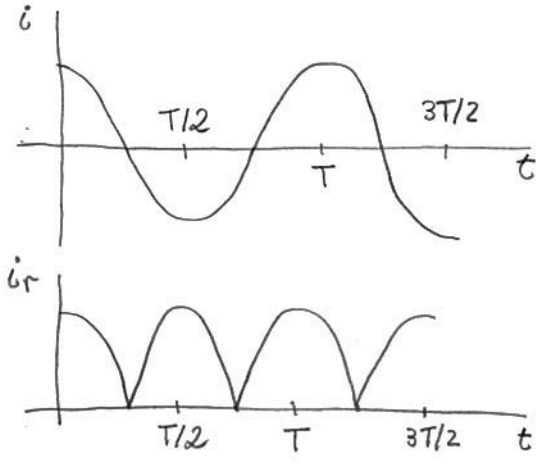
Resumindo, a corrente no G passa sempre no mesmo sentido, para cima. Se a corrente na fonte for

$$i = I \cos \omega t$$

a corrente no galvanômetro é dada por

$$i_r = I\,|\cos \omega t|$$

e chamada corrente retificada



A corrente retificada média é dada por

$$I_{rm} = \frac{1}{T}\int_0^T i_r(t)\,dt$$

onde T é o período da corrente alternada (ac).

$$I_{rm} = \frac{1}{T}\int_0^T I\,|\cos \omega t|\,dt$$

$$= \frac{I}{T/4}\int_0^{T/4} \cos \omega t\,dt$$

onde estamos usando o fato de que a média de $|\cos \omega t|$ é igual em cada quarto de período. Além disso, entre 0 e $T/4$, $\cos \omega t > 0$, dispensando o sinal de módulo.

$$I_{rm} = \frac{4I}{T\omega}\,\text{sen}\,\omega t\,\Big|_0^{T/4}$$

como $\omega = 2\pi/T$,

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow \frac{\omega T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_{rm} = \frac{4I}{2\pi}\cdot\left[\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \text{sen}\,0\right]$$

$$I_{rm} = \frac{2I}{\pi} \simeq 0{,}637\,I$$

Esta é a corrente que o galvanômetro de fato mede.

CORRENTE QUADRÁTICA MÉDIA (EFICAZ)

O galvanômetro pode ser calibrado para indicar a corrente quadrática média (ou

corrente eficaz) definida como

$$I_{qm} = \sqrt{(i^2)_{med}}$$

Como

$$i^2 = I^2 \cos^2 \omega t$$

$$(i^2)_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T I^2 \cos^2 \omega t \, dt$$

$$= \frac{I^2}{T}\int_0^T \frac{1+\cos 2\omega t}{2} \, dt$$

$$= \frac{I^2}{T}\left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4\omega}\right)\Big|_0^T$$

$$= \frac{I^2}{T}\left(\frac{T}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4\pi}{4\omega} - \frac{\operatorname{sen} 0}{4\omega}\right)$$

$$(i^2)_{med} = \frac{I^2}{2}$$

Assim

$$I_{qm} = \frac{I}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}707\, I$$

Analogamente a voltagem quadrática média (ou valor eficaz da voltagem) é dada por

$$V_{qm} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

É este valor de voltagem que é informado pelas distribuidoras de energia. Por exemplo, quando se diz que a voltagem é 110 V, quer-se dizer $V_{qm} = 110$ V. Neste caso a amplitude de voltagem é

$$V = \sqrt{2}\, V_{qm} = 156 \text{ V}$$

RESISTOR EM UM CIRCUITO AC



Vamos supor

$$i = I \cos \omega t$$

Assim

$$v_R = v_a - v_b = Ri = IR \cos \omega t$$

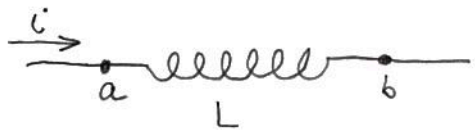
Definindo a amplitude de voltagem no resistor como

$$V_R = IR$$

podemos escrever

$$v_R = V_R \cos \omega t$$

INDUTOR EM UM CIRCUITO AC



$$v_L = v_a - v_b = L\frac{di}{dt}$$

$$= -\omega L I \operatorname{sen} \omega t$$

Definindo a reatância indutiva como

$$X_L = \omega L$$

temos

$$v_L = -I X_L \operatorname{sen} \omega t$$

Note que X_L tem dimensão de resistência (é dado em

ohm no SI).

Como

$$\cos(\omega t + 90°) = \cos 90° \cos \omega t - \operatorname{sen} 90° \operatorname{sen} \omega t$$
$$= -\operatorname{sen} \omega t$$

podemos escrever

$$v_L = I X_L \cos(\omega t + 90°)$$

ou

$$v_L = V_L \cos(\omega t + 90°)$$

onde $V_L = I X_L$.

Este resultado mostra que a voltagem no indutor está adiantada de 90° em relação à corrente.

CAPACITOR EM UM CIRCUITO AC



$$i = \frac{dq}{dt} = I \cos \omega t$$

$$q = \int I \cos \omega t \, dt$$
$$= \frac{I}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + C_1$$

Fisicamente, C_1 representa uma carga inicial existente no capacitor que não está associada à corrente. Na maioria das vezes esta carga não existe, de forma que vamos fazer $C_1 = 0$. Assim

$$q = \frac{I}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

A ddp no capacitor é

$$v_c = \frac{q}{C} = \frac{I}{\omega C} \operatorname{sen} \omega t$$

Definindo a reatância capacitiva como

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

e usando o fato de que

$$\cos(\omega t - 90°) = \cos \omega t \cos 90° + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} 90°$$
$$= \operatorname{sen} \omega t$$

podemos escrever

$$v_c = I X_C \cos(\omega t - 90°)$$

Definindo a amplitude de voltagem como

$$V_c = I X_C$$

temos

$$v_c = V_c \cos(\omega t - 90°)$$

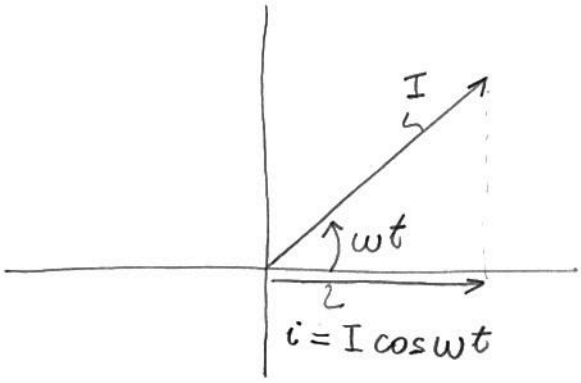
Veja que a voltagem no capacitor está atrasada de 90° em relação à corrente.

FASORES

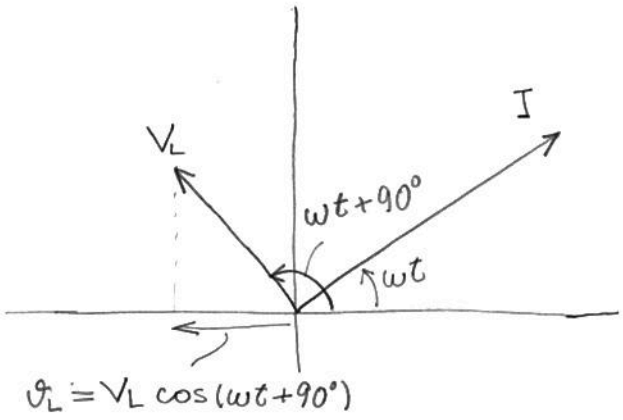
Um fasor é uma entidade geométrica que ajuda a descrever grandezas que variam senoidalmente no tempo.

A figura abaixo mostra um fasor para a corrente. A seta, de comprimento I, gira com velocidade angular ω e

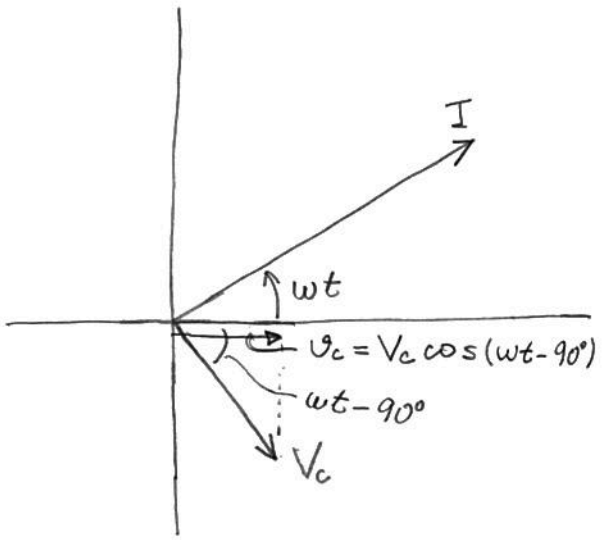
a sua projeção no eixo horizontal dá o valor instantâneo da corrente.



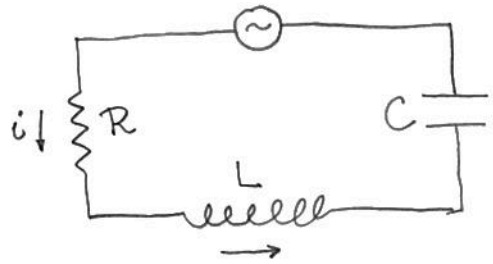
Os fasores para I e V_L no circuito com o indutor são dados por:



No circuito com o capacitor temos:



CIRCUITO RLC EM SÉRIE COM FEM AC



A ddp na fonte é dada por

$$v = v_R + v_L + v_c$$

Se a corrente for dada por

$$i = I \cos \omega t$$

então

$$v_R = I R \cos \omega t$$

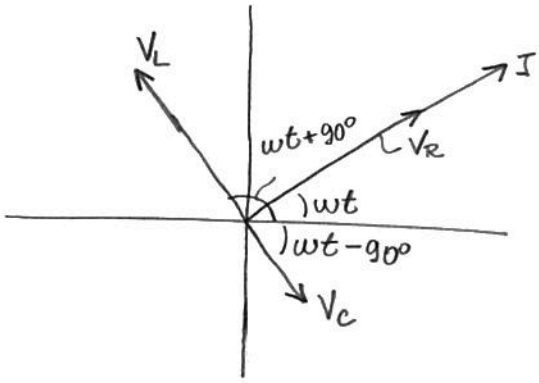
$$v_L = I X_L \cos(\omega t + 90°)$$

$$v_c = I X_c \cos(\omega t - 90°)$$

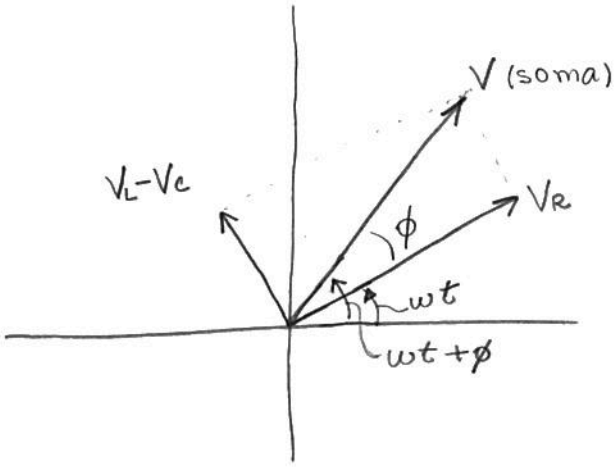
Vamos usar o diagrama de fasores para somar v_R, v_L e v_c. A voltagem soma (voltagem na fonte) é escrita como

$$v = V \cos(\omega t + \phi)$$

Nosso objetivo é obter V e ϕ.



Somando V_L e V_C, temos:



Do teorema de Pitágoras

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

$$= \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2}$$

$$V = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Define-se a impedância de um circuito ac (o equivalente da resistência em um circuito dc) como

$$Z = \frac{V}{I}$$

Assim, para o circuito RLC em série com fonte ac

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Em termos de ω, podemos escrever

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

A ddp na fonte pode ser escrita como

$$v = I Z \cos(\omega t + \phi)$$

O ÂNGULO DE FASE

Do diagrama de fasores,

$$tg\,\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Em termos de ω

$$tg\,\phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Da figura pode-se ver também que

$$\cos\phi = \frac{V_R}{V} = \frac{R}{Z}$$

Note que a voltagem na fonte pode estar:

adiantada em relação à corrente se $X_L > X_C$ ($\phi > 0$);

atrasada se $X_L < X_C$ ($\phi < 0$).

GRÁFICO $\phi \times \omega$

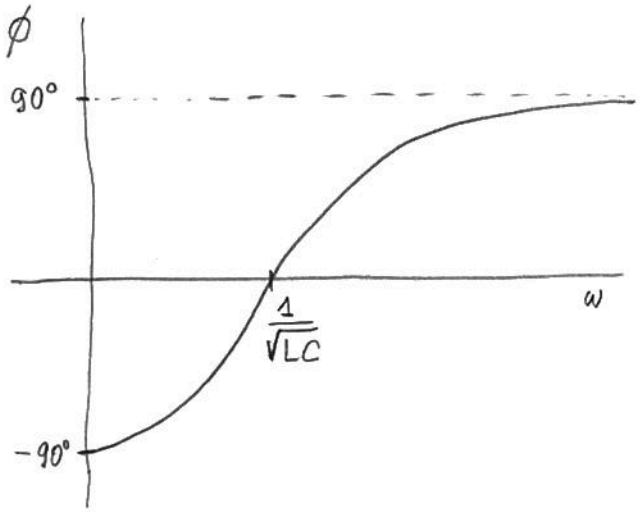
Note que:

$\omega \to 0 \Rightarrow tg\,\phi \to -\infty \Rightarrow \phi \to -90°$

$\omega \to \infty \Rightarrow tg\,\phi \to +\infty \Rightarrow \phi \to +90°$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow tg\,\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$

$tg\,\phi$, e portanto ϕ, crescem monotonicamente com ω.



RELAÇÃO PARA VALORES QUADRÁTICOS MÉDIOS

$$V = Z I \Rightarrow \frac{V}{\sqrt{2}} = Z \frac{I}{\sqrt{2}}$$

ou $V_{qm} = Z I_{qm}$

CASOS ESPECIAIS

Casos especiais podem ser obtidos retirando-se R, L ou C do circuito RLC.

INDUTOR PURO.

Fazendo $R=0$ e $X_C=0$, temos um circuito só com o indutor. Neste caso

$$tg\phi = \infty \Rightarrow \phi = 90°$$

Assim

$$v = X_L \cos(\omega t + 90°)$$

A voltagem está adiantada de 90° em relação à corrente.

INDUTOR E RESISTOR

Fazendo $X_C=0$, temos um circuito com um resistor e um indutor. Neste caso

$$tg\phi = \frac{X_L}{R} > 0$$

$$0 < \phi < 90°$$

A voltagem esta adiantada em relação à corrente mas não de 90°.

CAPACITOR PURO

se $R=0$ e $X_L=0$, temos

$$tg\phi = -\infty \Rightarrow \phi = -90°$$

Assim

$$v = X_C \cos(\omega t - 90°)$$

A voltagem está atrasada de 90° em relação à corrente.

CAPACITOR E RESISTOR

se $X_L=0$,

$$tg\phi = -\frac{X_C}{R} < 0$$

$$-90° < \phi < 0$$

A voltagem está atrasada em relação à corrente mas não de 90°.

POTÊNCIA

A potência fornecida pela fem no circuito RLC com fonte ac é dada por

$$p_v = v\,i = V\cos(\omega t+\phi)\, I\cos\omega t$$

Como p_v oscila rápido, o que se mede é o seu valor médio, dado por

$$P_{v,med} = \frac{1}{T}\int_0^T VI\cos(\omega t+\phi)\cos\omega t\, dt$$

Usando o fato de que

$$\cos(\omega t+\phi) = \cos\omega t\cos\phi - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi$$

podemos escrever

$$P_{v,med} = \frac{VI}{T}\cos\phi\int_0^T \cos^2\omega t\, dt - \frac{VI}{T}\operatorname{sen}\phi\int_0^T \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\, dt$$

As integrais são:

$$\int_0^T \cos^2\omega t\, dt = \int_0^T \frac{1+\cos 2\omega t}{2}\, dt$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4\omega}\right)\Big|_0^T$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4\pi}{4\omega} - \frac{\operatorname{sen} 0}{4\omega}$$

$$= \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\, dt = \frac{\operatorname{sen}^2\omega t}{2\omega}\Big|_0^T$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 2\pi}{2\omega} - \frac{\operatorname{sen}^2 0}{2\pi}$$

$$= 0$$

Assim

$$P_{v,med} = \frac{VI}{T}\cdot\frac{T}{2}\cos\phi = \frac{VI}{2}\cos\phi$$

ou

$$P_{v,med} = V_{qm}\, I_{qm}\cos\phi$$

O termo $\cos\phi$ é chamado fator de potência.

POTÊNCIA NO INDUTOR

A potência instantânea no indutor é dada por

$$p_L = L\,i\,\frac{di}{dt}$$

Como $i = I\cos\omega t$,

$$\frac{di}{dt} = -\omega I\operatorname{sen}\omega t$$

$$p_L = -\omega L I^2 \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\, dt$$

Tomando a média, obtemos

$$P_{L,med} = -\frac{\omega L I^2}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\, dt$$

$$= 0$$

$P_{L,med} = 0$ porque ora o indutor absorve energia, ora fornece energia, levando a uma média zero em um ciclo.

O mesmo raciocínio pode ser usado para mostrar que $P_{C,med} = 0$ (mostre!).

POTÊNCIA NO RESISTOR

No resistor,

$$p_R = R\,i^2 = R\,I^2\cos^2\omega t$$

$$P_{R,med} = \frac{RI^2}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\, dt = \frac{RI^2}{T}\cdot\frac{T}{2}$$

$$= \frac{RI^2}{2}$$

Como $I = V/Z$ e $\cos\phi = \frac{R}{Z}$,

$$P_{R,med} = \frac{RI}{2}\cdot\frac{V}{Z} = \frac{VI}{2}\cos\phi$$

Portanto,

$$P_{R,med} = P_{V,med}$$

Como $P_{L,med} = P_{C,med} = 0$, na média, a potência fornecida pela fem é igual à potência dissipada no resistor.

RESSONÂNCIA

A amplitude de corrente em um circuito RLC em série pode ser escrita em termos da amplitude de voltagem na fem, como

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Note que:

$\omega \to 0 \Rightarrow I \to 0$;

$\omega \to \infty \Rightarrow I \to 0$;

I tem valor máximo quando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}\ ;$$

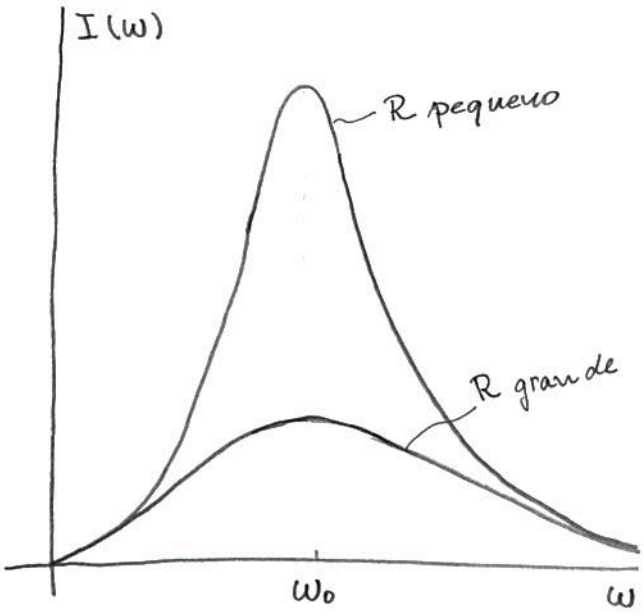
Neste caso temos $I_{max} = V/R$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

é chamada freqüência angular de ressonância. Ela é igual à freqüência angular de um circuito LC (sem fonte). Veja cap 31. A freqüência de ressonância é dada por

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

A fig mostra duas curvas para $I \times \omega$: uma para R pequeno e outra para R grande.



Note que:

$I_{max} = V/R$ é maior para R menor;

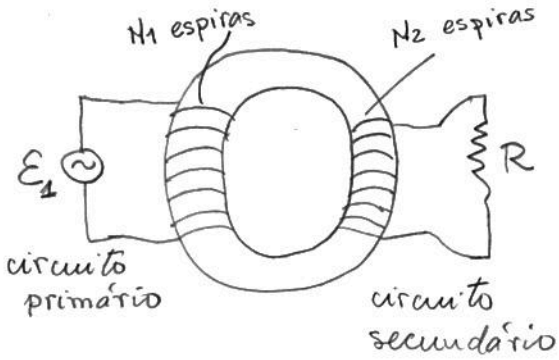
para $\omega \to 0$, o termo $1/\omega C$ é dominante no denominador e as duas curvas praticamente coincidem: $I \to \omega C V$;

para $\omega \to \infty$, o termo ωL é dominante no denominador e $I \to V/\omega L$: de novo, as curvas praticamente coincidem.

TRANSFORMADORES

Um transformador é um dispositivo usado para elevar ou abaixar uma voltagem ac.

Ele é constituído de duas bobinas enroladas no mesmo núcleo. Uma bobina chamada primária, com N_1 espiras, está conectada a uma fem alternada $\mathcal{E}_1$. A segunda bobina é chamada secundária e possui N_2 espiras. Numa versão simplificada a segunda bobina é conectada a um resistor R.

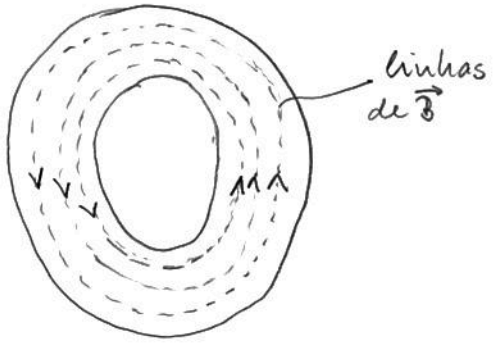


Admitindo que o fluxo em cada espira seja o mesmo, ainda que para espiras de bobinas diferentes, podemos escrever as fem's nos dois enrolamentos como

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (A)$$

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (B)$$

Esta é uma suposição razoável se o núcleo for feito de material de alta permeabilidade magnética ($K_m \gg 1$). Neste caso as linhas de $\vec{B}$ ficam praticamente confinadas ao interior do núcleo.



Supondo que as resistências dos enrolamentos sejam desprezíveis, as voltagens são praticamente iguais às fem's: $V_1 = \mathcal{E}_1$, $V_2 = \mathcal{E}_2$. Assim, dividindo (B) por (A), temos

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (C)$$

Aqui V representa a amplitude de voltagem mas a relação acima vale também para valores eficazes.

Um transformador é dito abaixador se $N_2 < N_1 \Rightarrow V_2 < V_1$.

Ele é dito elevador se $N_2 > N_1 \Rightarrow V_2 > V_1$.

Admitindo que não hajam perdas no transformador, as potências nos circuitos primário e secundário devem ser iguais. Assim

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \qquad (D)$$

De (C) e (D) pode-se escrever uma relação para as amplitudes de corrente:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (E)$$

A corrente no secundário é dada por

$$I_2 = \frac{V_2}{R} \qquad (F)$$

Usando (C) e (F), podemos escrever

$$I_2 V_2 = \frac{V_2^2}{R} = \frac{V_1^2}{R}\frac{N_2^2}{N_1^2} \qquad (G)$$

Substituindo (G) em (D), obtemos

$$I_1 = \frac{V_1}{R\,(N_1/N_2)^2}$$

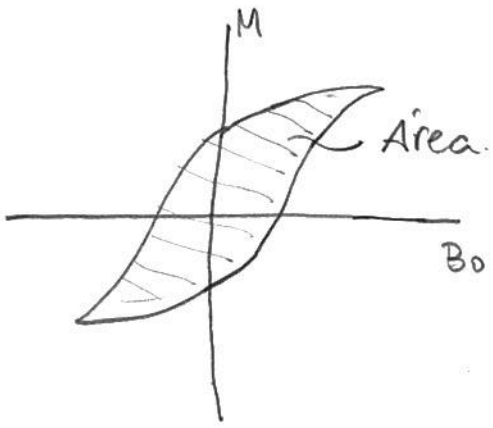
Do ponto de vista do circuito primário, é como se existisse uma resistência efetiva dada por

$$R_1 = R\,(N_1/N_2)^2$$

Em geral não existe transformador sem perdas. Perdas ocorrem porque:

(1) Os fios dos enrolamentos possuem resistência.

(2) Há perdas por histerese no núcleo. A perda por volume, por ciclo, é dada pela área compreendida pela curva de histerese



(3) Normalmente o núcleo é feito de material condutor (ferro). Assim existem correntes de Foucalt que levam a perdas por efeito Joule no núcleo.

Lista de problemas:

3, 4, 7, 8, 12, 17, 21, 23, 29, 30, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 47, 54 (10º Ed)

5, 4, 11, 10, 14, 19, 27, 29, 37, 38, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 57, 64 (12º Ed)

Respostas dos problemas pares.

32.4 (a) $I = 0,0132\ A$

(b) $I = 0,132\ A$

(c) $I = 1,32\ A$

32.8 $f = 1,63\ MHz$

32.12 (a) $Z = 224\ \Omega$

(b) $I = 0,134\ A$

(c) $V_R = 26,8\ V$

$V_L = 13,4\ V$

(d) $\phi = 26.6°$, adiantada

32.40 $$\frac{V_{saida}}{V} = \frac{1}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow \frac{V_{saida}}{V} \to \frac{1}{\omega^2 LC}$$

$$\omega \to 0 \Rightarrow \frac{V_{saida}}{V} \to 1$$

3.42 (a) $$V_L = \frac{\omega L V}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

(b) $$V_C = \frac{1}{\omega C}\,\frac{V}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

(d) $\omega = 0 \Rightarrow V_L = 0$

$\Rightarrow V_C = V$

$\omega \to \infty \Rightarrow V_L \to V$

$\Rightarrow V_C \to 0$

$V_L = V_C \Rightarrow \omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

freq. de ressonância

32.54 (a) $\omega_0 = 786\ rad/s$

(b) $I_{qm,0} = 0,200\ A$

(c) $\omega_1 = 655\ rad/s$

$\omega_2 = 943\ rad/s$

(d) $R = 300\ \Omega$: $I_{qm,0} = 0,200\ A$

$\Delta\omega = 288\ rad/s$

$R = 30,0\ \Omega$: $I_{qm} = 2,00\ A$

$\Delta\omega = 29,0\ rad/s$

$R = 3,00\ \Omega$ $I_{qm} = 20,0\ A$

$\Delta\omega = 2,89\ rad/s$

Quando R diminui, $I_{qm,0}$ aumenta e $\Delta\omega$ diminui.