1. CORRENTE ALTERNADA

FONTE DE CORRENTE ALTERNADA (A.C)

Simbolo: 

A voltagem instantânea é dada por

$$v(t) = V \cos \omega t$$

onde V é a amplitude de voltagem e ω a freqüência angular. A freqüência é dada por

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

No Brasil e em muitos paises os sistemas de distribuição de energia operam com $f = 60\ Hz$.

CORRENTE ALTERNADA

Vamos supor que a corrente instantânea seja dada por

$$i(t) = I \cos \omega t$$

onde I é a amplitude de corrente

MEDIDA DE CORRENTE ALTERNADA

O galvanômetro de d'Arsonval mede a corrente através de um ponteiro que gira graças a um torque magnético. Se a corrente for alternada com f. grande (tipo 60Hz) o ponteiro não consegue acompanhar a oscilação da corrente e o galvanômetro não pode medi-la.

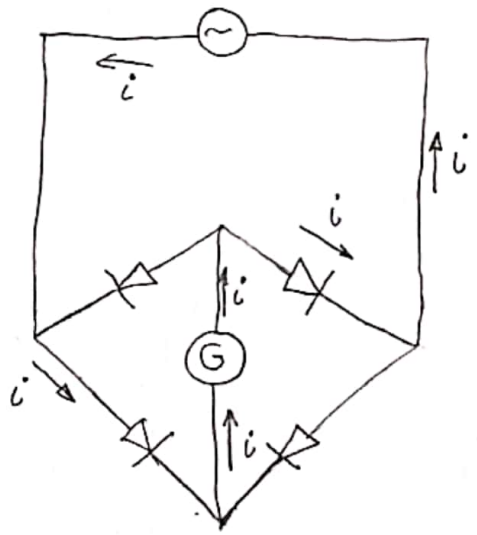
Pode-se usar um retificador de onda completa para medir uma corrente alternada. Para isto usa-se um diodo que é um dispositivo que deixa a corrente passar em um único sentido. O simbolo



indica que a corrente só passa para a direita.

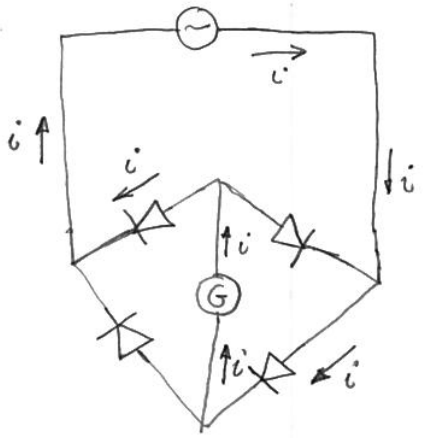
RETIFICADOR DE ONDA COMPLETA

A figura abaixo mostra que quando i é para a esquerda na fonte, a corrente em G é para cima.



Digitalizado com CamScanner

Quando i é para a direita na fonte, a corrente em G também é para cima.



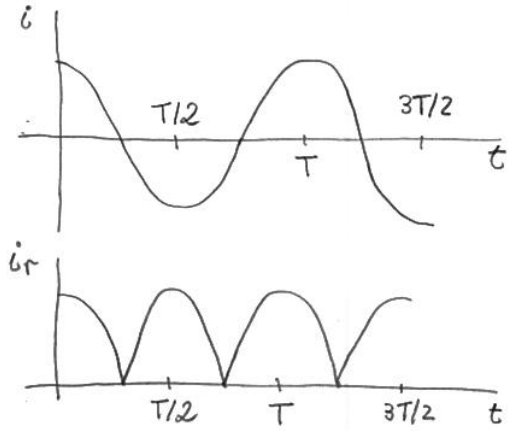
Resumindo, a corrente no G passa sempre no mesmo sentido, para cima. Se a corrente na fonte for

$$i = I \cos \omega t$$

a corrente no galvanômetro é dada por

$$i_r = I\,|\cos \omega t|$$

e chamada corrente retificada



A corrente retificada média é dada por

$$I_{rm} = \frac{1}{T}\int_0^T i_r(t)\,dt$$

onde T é o período da corrente alternada (ac).

$$I_{rm} = \frac{1}{T}\int_0^T I\,|\cos \omega t|\,dt$$

$$= \frac{I}{T/4}\int_0^{T/4} \cos \omega t\,dt$$

onde estamos usando o fato de que a média de $|\cos \omega t|$ é igual em cada quarto de período. Além disso, entre 0 e $T/4$, $\cos \omega t > 0$, dispensando o sinal de módulo.

$$I_{rm} = \frac{4I}{T\omega}\,\text{sen}\,\omega t\,\Big|_0^{T/4}$$

como $\omega = 2\pi/T$,

$$\omega T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$I_{rm} = \frac{4I}{2\pi}\cdot\left[\text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \text{sen}\,0\right]$$

$$I_{rm} = \frac{2I}{\pi} \simeq 0{,}637\,I$$

Esta é a corrente que o galvanômetro de fato mede.

CORRENTE QUADRÁTICA MÉDIA (EFICAZ)

O galvanômetro pode ser calibrado para indicar a corrente quadrática média (ou

corrente eficaz) definida como

$$I_{qm} = \sqrt{(i^2)_{med}}$$

Como

$$i^2 = I^2 \cos^2 \omega t$$

$$(i^2)_{med} = \frac{1}{T}\int_0^T I^2 \cos^2 \omega t \, dt$$

$$= \frac{I^2}{T}\int_0^T \frac{1+\cos 2\omega t}{2} \, dt$$

$$= \frac{I^2}{T}\left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4\omega}\right)\Big|_0^T$$

$$= \frac{I^2}{T}\left(\frac{T}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4\pi}{4\omega} - \frac{\operatorname{sen} 0}{4\omega}\right)$$

$$(i^2)_{med} = \frac{I^2}{2}$$

Assim

$$I_{qm} = \frac{I}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}707\, I$$

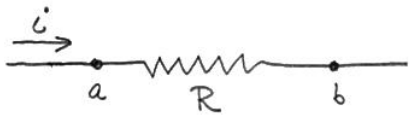
Analogamente, a voltagem quadrática média (ou valor eficaz da voltagem) é dada por

$$V_{qm} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

É este valor de voltagem que é informado pelas distribuidoras de energia. Por exemplo, quando se diz que a voltagem é 110 V, quer-se dizer $V_{qm} = 110\,V$. Neste caso a amplitude de voltagem é

$$V = \sqrt{2}\, V_{qm} = 156\,V$$

RESISTOR EM UM CIRCUITO AC



Vamos supor

$$i = I \cos \omega t$$

Assim

$$v_R = v_a - v_b = Ri = IR \cos \omega t$$

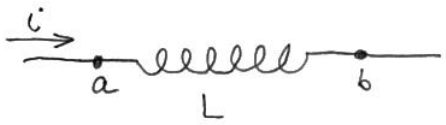
Definindo a amplitude de voltagem no resistor como

$$V_R = IR$$

podemos escrever

$$v_R = V_R \cos \omega t$$

INDUTOR EM UM CIRCUITO AC



$$v_L = v_a - v_b = L\frac{di}{dt}$$

$$= -\omega L I \operatorname{sen} \omega t$$

Definindo a reatância indutiva como

$$X_L = \omega L$$

temos

$$v_L = -I X_L \operatorname{sen} \omega t$$

Note que X_L tem dimensão de resistência (é dado em

ohm no SI).

Como

$$\cos(\omega t + 90°) = \cos 90° \cos \omega t - \operatorname{sen} 90° \operatorname{sen} \omega t$$
$$= -\operatorname{sen} \omega t,$$

podemos escrever

$$v_L = I X_L \cos(\omega t + 90°)$$

ou

$$v_L = V_L \cos(\omega t + 90°)$$

onde $V_L = I X_L$.

Este resultado mostra que a voltagem no indutor está adiantada de 90° em relação à corrente.

CAPACITOR EM UM CIRCUITO AC



$$i = \frac{dq}{dt} = I \cos \omega t$$

$$q = \int I \cos \omega t \, dt$$
$$= \frac{I}{\omega} \operatorname{sen} \omega t + C_1$$

Fisicamente, C_1 representa uma carga inicial existente no capacitor que não está associada à corrente. Na maioria das vezes esta carga não existe, de forma que vamos fazer $C_1 = 0$. Assim

$$q = \frac{I}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

A ddp no capacitor é

$$v_c = \frac{q}{C} = \frac{I}{\omega C} \operatorname{sen} \omega t$$

Definindo a reatância capacitiva como

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

e usando o fato de que

$$\cos(\omega t - 90°) = \cos \omega t \cos 90° + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} 90°$$
$$= \operatorname{sen} \omega t$$

podemos escrever

$$v_c = I X_C \cos(\omega t - 90°)$$

Definindo a amplitude de voltagem como

$$V_c = I X_C$$

temos

$$v_c = V_c \cos(\omega t - 90°)$$

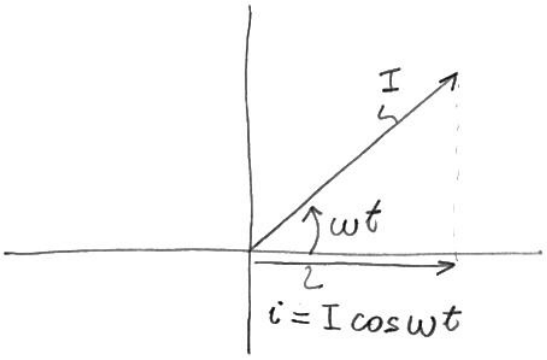
Veja que a voltagem no capacitor está atrasada de 90° em relação à corrente.

FASORES

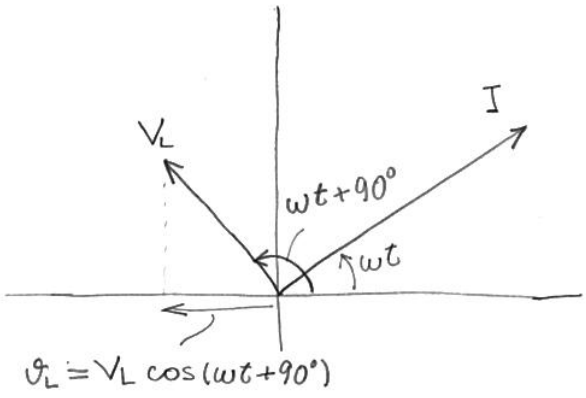
Um fasor é uma entidade geométrica que ajuda a descrever grandezas que variam senoidalmente no tempo.

A figura abaixo mostra um fasor para a corrente. A seta, de comprimento I, gira com velocidade angular ω e

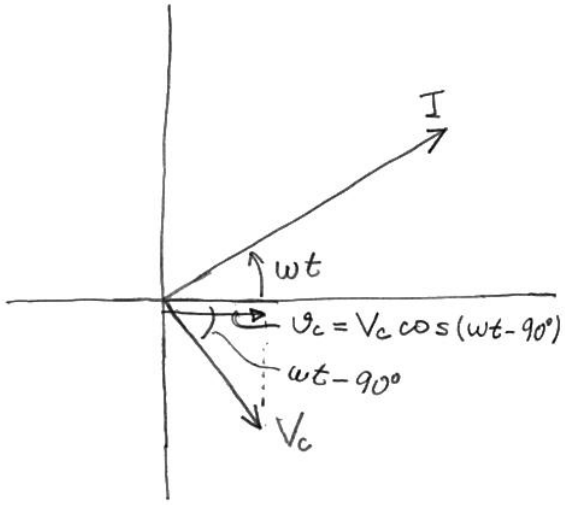
a sua projeção no eixo horizontal dá o valor instantâneo da corrente.



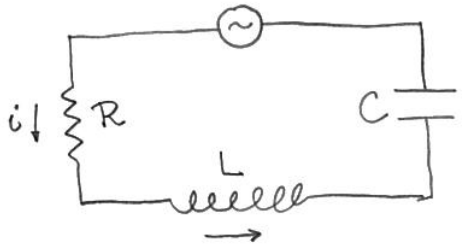
Os fasores para I e V_L no circuito com o indutor são dados por:



No circuito com o capacitor temos:



CIRCUITO RLC EM SÉRIE COM FEM AC



A ddp na fonte é dada por

$$\vartheta = \vartheta_R + \vartheta_L + \vartheta_c$$

Se a corrente for dada por

$$i = I \cos \omega t$$

então

$$\vartheta_R = I R \cos \omega t$$

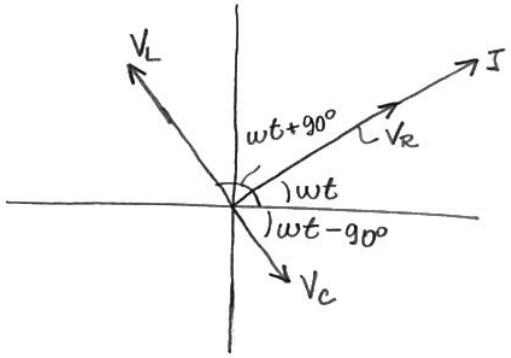
$$\vartheta_L = I X_L \cos(\omega t + 90°)$$

$$\vartheta_c = I X_c \cos(\omega t - 90°)$$

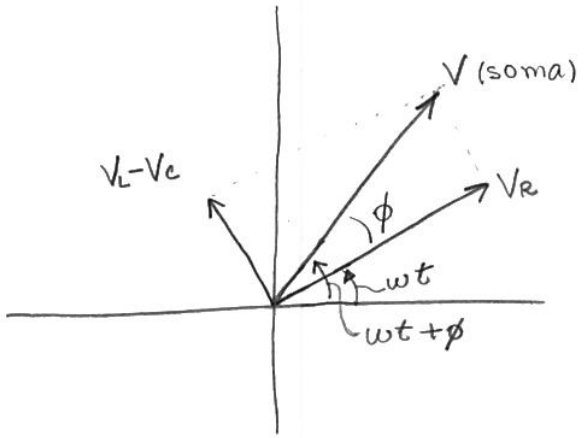
Vamos usar o diagrama de fasores para somar ϑ_R, ϑ_L e ϑ_c. A voltagem soma (voltagem na fonte) é escrita como

$$\vartheta = V \cos(\omega t + \phi)$$

Nosso objetivo é obter V e ϕ.



Somando V_L e V_C, temos:



Do teorema de Pitágoras

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2}$$

$$= \sqrt{(IR)^2 + (IX_L - IX_C)^2}$$

$$V = I\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Define-se a impedância de um circuito ac (o equivalente da resistência em um circuito dc) como

$$Z = \frac{V}{I}$$

Assim, para o circuito RLC em série com fonte ac

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

Em termos de ω, podemos escrever

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

A ddp na fonte pode ser escrita como

$$v = I Z \cos(\omega t + \phi)$$

O ÂNGULO DE FASE

Do diagrama de fasores,

$$tg\,\phi = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

Em termos de ω

$$tg\,\phi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

Da figura pode-se ver também que

$$\cos\phi = \frac{V_R}{V} = \frac{R}{Z}$$

Note que a voltagem na fonte pode estar:

adiantada em relação à corrente se $X_L > X_C$ ($\phi > 0$);

atrasada se $X_L < X_C$ ($\phi < 0$).

GRÁFICO $\phi \times \omega$

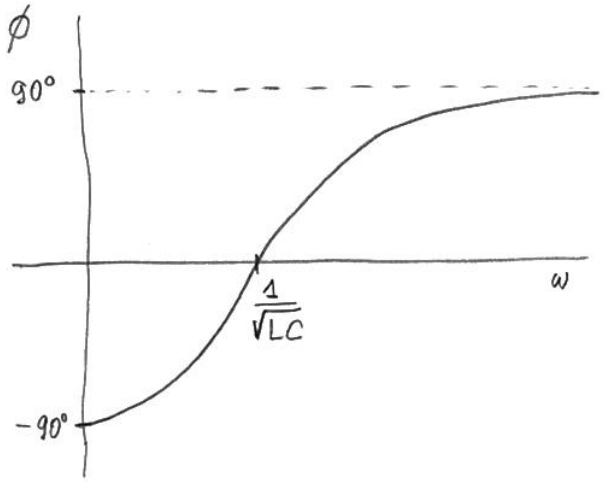
Note que:

$\omega \to 0 \Rightarrow tg\,\phi \to -\infty \Rightarrow \phi \to -90°$

$\omega \to \infty \Rightarrow tg\,\phi \to +\infty \Rightarrow \phi \to +90°$

$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow tg\,\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$

$tg\,\phi$, e portanto ϕ, crescem monotonicamente com ω.



RELAÇÃO PARA VALORES QUADRÁTICOS MÉDIOS

$$V = Z I \Rightarrow \frac{V}{\sqrt{2}} = Z \frac{I}{\sqrt{2}}$$

ou $\quad V_{qm} = Z I_{qm}$

CASOS ESPECIAIS

Casos especiais podem ser obtidos retirando-se R, L ou C do circuito RLC.

INDUTOR PURO.

Fazendo $R=0$ e $X_C=0$, temos um circuito só com o indutor. Neste caso

$$tg\phi = \infty \Rightarrow \phi = 90°$$

Assim

$$v = X_L \cos(\omega t + 90°)$$

A voltagem está adiantada de 90° em relação à corrente.

INDUTOR E RESISTOR

Fazendo $X_C=0$, temos um circuito com um resistor e um indutor. Neste caso

$$tg\phi = \frac{X_L}{R} > 0$$

$$0 < \phi < 90°$$

A voltagem está adiantada em relação à corrente mas não de 90°.

CAPACITOR PURO

se $R=0$ e $X_L=0$, temos

$$tg\phi = -\infty \Rightarrow \phi = -90°$$

Assim

$$v = X_C \cos(\omega t - 90°)$$

A voltagem está atrasada de 90° em relação à corrente.

CAPACITOR E RESISTOR

se $X_L=0$,

$$tg\phi = -\frac{X_C}{R} < 0$$

$$-90° < \phi < 0$$

A voltagem está atrasada em relação à corrente mas não de 90°.

POTÊNCIA

A potência fornecida pela fem no circuito RLC com fonte ac é dada por

$$p_v = vi = V\cos(\omega t+\phi)\, I\cos\omega t$$

Como p_v oscila rápido, o que se mede é o seu valor médio, dado por

$$P_{v,med} = \frac{1}{T}\int_0^T VI\cos(\omega t+\phi)\cos\omega t\, dt$$

Usando o fato de que

$$\cos(\omega t+\phi) = \cos\omega t\cos\phi - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\phi$$

podemos escrever

$$P_{v,med} = \frac{VI}{T}\cos\phi\int_0^T \cos^2\omega t\, dt - \frac{VI}{T}\operatorname{sen}\phi\int_0^T \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\, dt$$

As integrais são:

$$\int_0^T \cos^2\omega t\, dt = \int_0^T \frac{1+\cos 2\omega t}{2}\, dt$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{4\omega}\right)\Big|_0^T$$

$$= \frac{T}{2} + \frac{\operatorname{sen} 4\pi}{4\omega} - \frac{\operatorname{sen} 0}{4\omega}$$

$$= \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\, dt = \frac{\operatorname{sen}^2\omega t}{2\omega}\Big|_0^T$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 2\pi}{2\omega} - \frac{\operatorname{sen}^2 0}{2\pi}$$

$$= 0$$

Assim

$$P_{v,med} = \frac{VI}{T}\cdot\frac{T}{2}\cos\phi = \frac{VI}{2}\cos\phi$$

ou

$$P_{v,med} = V_{qm}\, I_{qm}\cos\phi$$

O termo $\cos\phi$ é chamado fator de potência.

POTÊNCIA NO INDUTOR

A potência instantânea no indutor é dada por

$$p_L = L\, i\,\frac{di}{dt}$$

como $i = I\cos\omega t$,

$$\frac{di}{dt} = -\omega I\operatorname{sen}\omega t$$

$$p_L = -\omega L I^2 \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\, dt$$

Tomando a média, obtemos

$$P_{L,med} = -\frac{\omega L I^2}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\omega t\cos\omega t\, dt$$

$$= 0$$

$P_{L,med} = 0$ porque ora o indutor absorve energia, ora fornece energia, levando a uma média zero em um ciclo.

O mesmo raciocínio pode ser usado para mostrar que $P_{C,med} = 0$ (mostre!).

POTÊNCIA NO RESISTOR

No resistor,

$$p_R = R i^2 = R I^2\cos^2\omega t$$

$$P_{R,med} = \frac{RI^2}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\, dt = \frac{RI^2}{T}\cdot\frac{T}{2}$$

$$= \frac{RI^2}{2}$$

Como $I = V/Z$ e $\cos\phi = \frac{R}{Z}$,

$$P_{R,med} = \frac{RI}{2}\cdot\frac{V}{Z} = \frac{VI}{2}\cos\phi$$

Portanto,

$$P_{R,med} = P_{V,med}$$

Como $P_{L,med} = P_{C,med} = 0$, na média, a potência fornecida pela fem é igual à potência dissipada no resistor.

RESSONÂNCIA

A amplitude de corrente em um circuito RLC em série pode ser escrita em termos da amplitude de voltagem na fem, como

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Note que:

$\omega \to 0 \Rightarrow I \to 0$;

$\omega \to \infty \Rightarrow I \to 0$;

I tem valor máximo quando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}\ ;$$

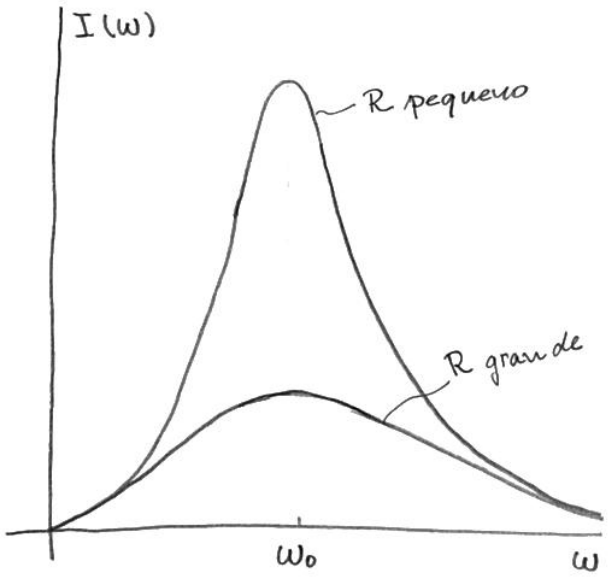
Neste caso temos $I_{max} = V/R$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

é chamada freqüência angular de ressonância. Ela é igual à freqüência angular de um circuito LC (sem fonte). Veja cap 31. A freqüência de ressonância é dada por

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

A fig mostra duas curvas para $I \times \omega$: uma para R pequeno e outra para R grande.



Note que:

$I_{max} = V/R$ é maior para R menor;

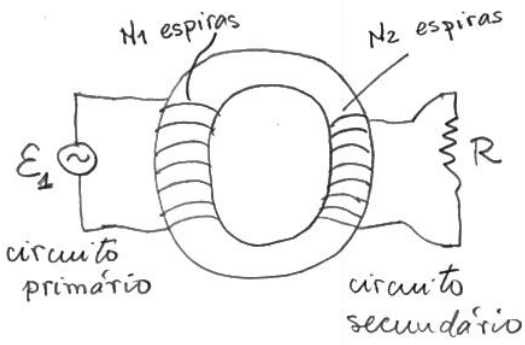
para $\omega \to 0$, o termo $1/\omega C$ é dominante no denominador e as duas curvas praticamente coincidem: $I \to \omega C V$;

para $\omega \to \infty$, o termo ωL é dominante no denominador e $I \to V/\omega L$: de novo, as curvas praticamente coincidem.

TRANSFORMADORES

Um transformador é um dispositivo usado para elevar ou abaixar uma voltagem ac.

Ele é constituído de duas bobinas enroladas no mesmo núcleo. Uma bobina chamada primária, com N_1 espiras, está conectada a uma fem alternada $\mathcal{E}_1$. A segunda bobina é chamada secundária e possui N_2 espiras. Numa versão simplificada a segunda bobina é conectada a um resistor R.

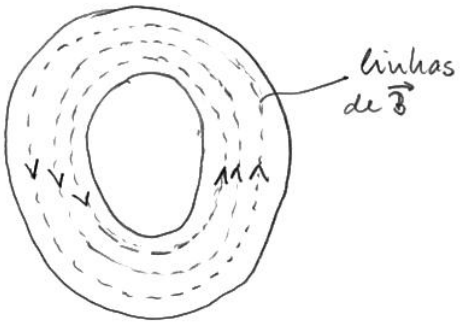


Admitindo que o fluxo em cada espira seja o mesmo, ainda que para espiras de bobinas diferentes, podemos escrever as fem's nos dois enrolamentos como

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (A)$$

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (B)$$

Esta é uma suposição razoável se o núcleo for feito de material de alta permeabilidade magnética ($K_m >> 1$). Neste caso as linhas de $\vec{B}$ ficam praticamente confinadas ao interior do núcleo.



Supondo que as resistências dos enrolamentos sejam desprezíveis, as voltagens são praticamente iguais às fem's: $V_1 = \mathcal{E}_1$, $V_2 = \mathcal{E}_2$. Assim, dividindo (B) por (A), temos

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (C)$$

Aqui V representa a amplitude de voltagem mas a relação acima vale também para valores eficazes.

Um transformador é dito abaixador se $N_2 < N_1 \Rightarrow V_2 < V_1$.

Ele é dito elevador se $N_2 > N_1 \Rightarrow V_2 > V_1$.

Admitindo que não hajam perdas no transformador, as potências nos circuitos primário e secundário devem ser iguais. Assim

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \qquad (D)$$

De (C) e (D) pode-se escrever uma relação para as amplitudes de corrente:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (E)$$

A corrente no secundário é dada por

$$I_2 = \frac{V_2}{R} \qquad (F)$$

Usando (C) e (F), podemos escrever

$$I_2 V_2 = \frac{V_2^2}{R} = \frac{V_1^2}{R}\,\frac{N_2^2}{N_1^2} \qquad (G)$$

Substituindo (G) em (D), obtemos

$$I_1 = \frac{V_1}{R\,(N_1/N_2)^2}$$

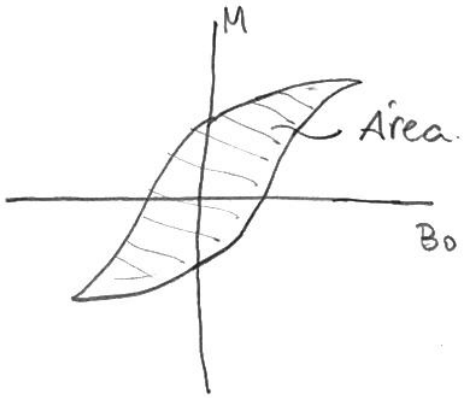
Do ponto de vista do circuito primário, é como se existisse uma resistência efetiva dada por

$$R_1 = R\,(N_1/N_2)^2$$

Em geral não existe transformador sem perdas. Perdas ocorrem porque:

(1) Os fios dos enrolamentos possuem resistência.

(2) Há perdas por histerese no núcleo. A perda por volume, por ciclo, é dada pela área compreendida pela curva de histerese



(3) Normalmente o núcleo é feito de material condutor (ferro). Assim existem correntes de Foucalt que levam a perdas por efeito Joule no núcleo.

2. ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

A partir das equações de Maxwell é possível prever a existência de ondas eletromagnéticas: ondas onde um campo elétrico e um campo magnético propagam com uma velocidade definida. A predição destas ondas, bem como a sua identificação com a luz visível, foi feita por Maxwell no final do século XIX, marcando a unificação das teorias da eletricidade, magnetismo e óptica.

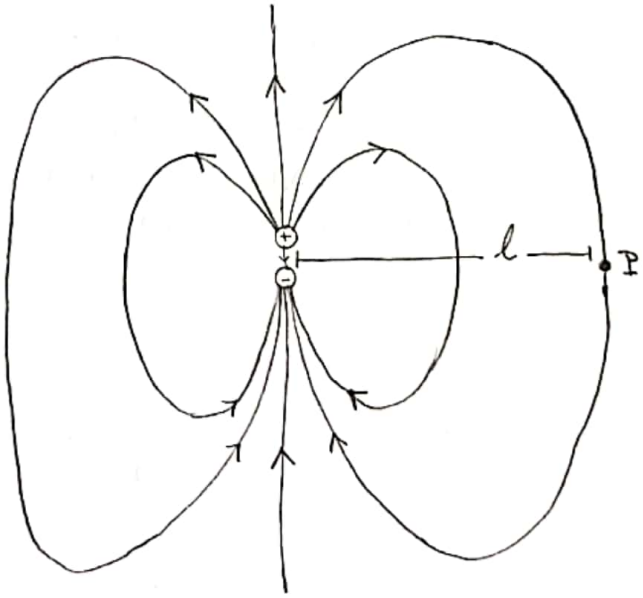
Conforme veremos neste capítulo, as ondas eletromagnéticas propagam no vácuo com velocidade dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Por outro lado, a freqüência e o comprimento de onda podem assumir qualquer valor. Em particular a luz visível possui comprimento de onda na faixa de 400 a 700 nm.

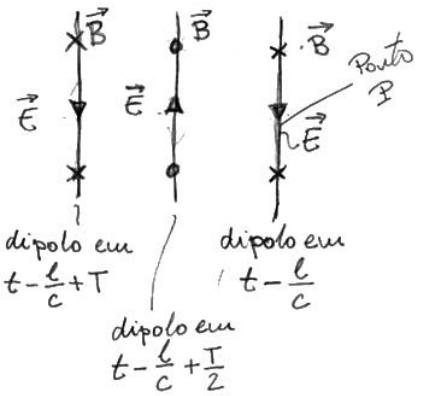
Para entender qualitativamente a propagação de uma onda eletromagnética podemos pensar da seguinte maneira. A lei de Faraday prevê que um campo magnético variável no tempo induz um campo elétrico. Por sua vez, a lei de Ampère (incluindo o termo de corrente de deslocamento) prevê que um campo elétrico variável induz um campo magnético. Esta indução mútua entre os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ dá origem a uma onda eletromagnética; $\vec{E}$ gera $\vec{B}$, $\vec{B}$ gera $\vec{E}$, e assim por diante.

Para entender melhor o mecanismo de propagação da onda, considere a onda gerada por um dipolo que oscila no tempo com freqüência f (período $T = 1/f$). Se o dipolo fosse estático as linhas de $\vec{E}$ seriam dadas pela figura abaixo. Como o dipolo oscila, as linhas de $\vec{E}$ invertem o sentido a cada meio período.



Como a onda viaja com uma velocidade finita c, o campo $\vec{E}$ no ponto P, no instante t, deve corresponder à configuração do dipolo em um instante anterior $t - l/c$. A configuração desse campo, juntamente

Digitalizado com CamScanner

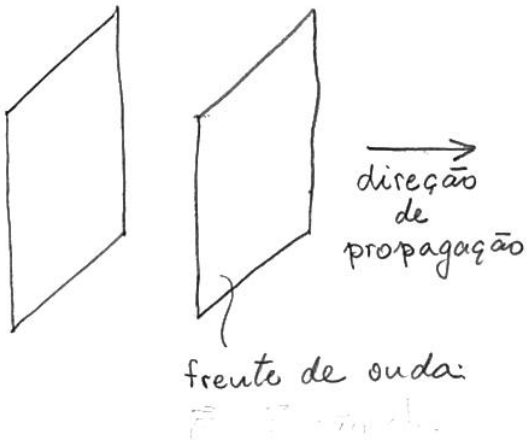


com as configurações dos campos correspondentes ao dipolo meio período e um período depois, são mostradas na figura acima.

O campo elétrico em um dado ponto inverte o sentido a cada meio período. Essa variação de $\vec{E}$ no tempo produz um campo magnético que também é indicado na figura.

ONDAS PLANAS

Se estivermos suficientemente longe da fonte (o dipolo, por exemplo) podemos supor que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são constantes sobre planos perpendiculares à direção de propagação. Estes planos são chamados frentes de onda e as ondas são ondas planas.



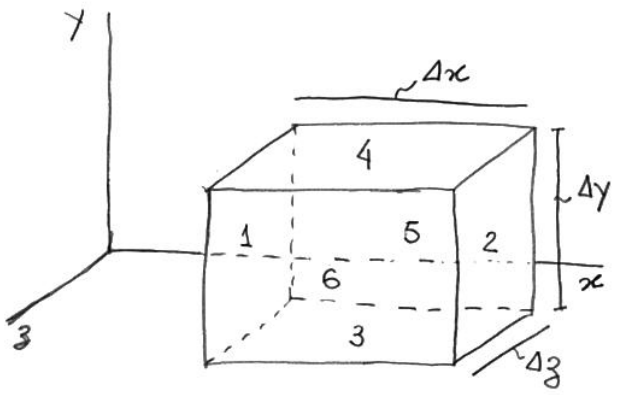
A seguir vamos deduzir a eq. de onda para o caso particular de ondas planas. Vamos chamar de x a direção de propagação, de forma que as frentes de onda são planos paralelos ao plano yz. Portanto $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não dependem de y e z. Por outro lado, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ devem depender de x e t. Caso contrário seriam campos uniformes (independentes de x, y e z) ou estacionários (independentes de t), e portanto não teríamos uma onda. Então vamos supor

$$\vec{E} = \vec{E}(x,t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(x,t)$$

OS CAMPOS $\vec{E}$ e $\vec{B}$ SÃO TRANSVERSAIS

Para deduzir a eq. de onda vamos inicialmente mostrar que $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são perpendiculares à direção de propagação. Vamos considerar primeiro o caso de $\vec{E}$ aplicando a lei de Gauss ao paralelepípedo da figura.



Como não há carga no interior do paralelepípedo

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$$

Na face 1, por exemplo

$$\vec{E} = E_x^{(1)}\hat{\imath} + E_y^{(1)}\hat{\jmath} + E_z^{(1)}\hat{k} \quad \text{(na face (1))}$$

$$d\vec{A} = -\,dy\,dz\,\hat{\imath}$$

$$\int_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{A} = -E_x^{(1)}\int_{S_1} dy\,dz = -E_x^{(1)}\,\Delta y\,\Delta z$$

↳ lembre-se que $\vec{E}$ é cte nos planos 1 e 2.

Somando as contribuições das faces 1 e 2, temos

$$\int_{S_1+S_2}\vec{E}\cdot d\vec{A} \simeq \left[E_x^{(2)} - E_x^{(1)}\right]\Delta y\,\Delta z$$

Na face 4, temos

$$\int_{S_4}\vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E_y^{(4)}\,dx\,dz$$

Note que $\vec{E}$ não é cte nesta face. somando as contribuições das faces 3 e 4, temos

$$\int_{S_3+S_4}\vec{E}\cdot d\vec{A} = \int\left[E_y^{(4)} - E_y^{(3)}\right]dx\,dz$$

Como $\vec{E}$ só depende de x, tem o mesmo valor em pontos com o mesmo x e o mesmo z nas faces 3 e 4. Assim

$$\int_{S_3+S_4}\vec{E}\cdot d\vec{A} = 0$$

O mesmo resultado pode ser obtido para as faces 5 e 6, de forma que só sobram as integrais nas faces 1 e 2. Assim

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{A} = \left[E_x^{(2)} - E_x^{(1)}\right]\Delta y\,\Delta z = 0$$

Portanto, $E_x^{(2)} = E_x^{(1)}$. Em outras palavras, se $\vec{E}$ tiver componente x, esta componente tem que ser uniforme. Contudo um campo uniforme não pode estar associado a uma onda. O campo da onda tem que ser função de x e t. Então temos que fazer $E_x = 0$, de forma que $\vec{E}$ é perpendicular à direção de propagação da onda.

Aplicando a lei de Gauss do magnetismo

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{A} = 0$$

ao paralelepípedo da figura, mostra-se de forma análoga que $\vec{B}$ também não tem componente na direção x.

$\vec{E}$ e $\vec{B}$ SÃO MUTUAMENTE PERPENDICULARES

Vamos mostrar agora que $\vec{B}$ é perpendicular a $\vec{E}$. Sem perda de generalidade, podemos escolher o eixo y na direção de $\vec{E}$. Assim

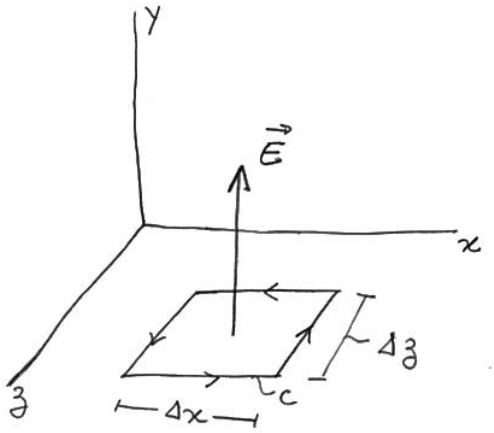
$$\vec{E} = \hat{j}\, E_y(x,t)$$

Resta mostrar que $\vec{B}$ aponta na direção do eixo z.

Vamos aplicar a lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\Phi_B$$

ao retângulo da fig abaixo



Como $\vec{E}$ é perpendicular aos 4 lados do retângulo,

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0$$

Por outro lado,

$$\Phi_B \simeq B_y\, \Delta x\, \Delta z$$

↳ supondo Δx e Δz pequenos

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\partial B_y}{\partial t}\,\Delta x\,\Delta z$$

Da lei de Faraday, concluímos que

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0$$

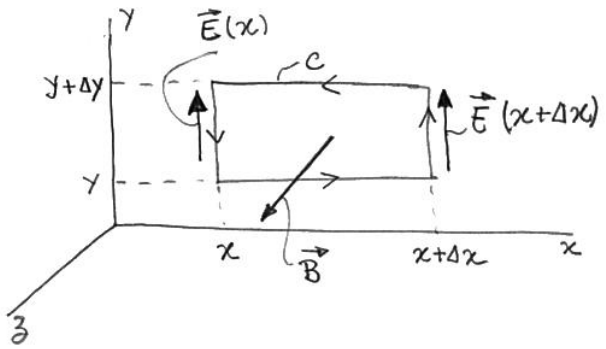
o que quer dizer que $B_y = 0$ ou $B_y = cte$. Mas B_y não pode ser constante porque assim não seria o campo de uma onda. Então $B_y = 0$. Como $B_x = 0$ também, podemos escrever

$$\vec{B} = \hat{k}\, B_z(x,t)$$

Agora estamos prontos para deduzir a equação de onda.

EQUAÇÃO DE ONDA

Vamos começar nossa dedução aplicando a lei de Faraday ao retângulo da fig abaixo, circulando no sentido anti-horário. Isto quer dizer que o sentido positivo do vetor $d\vec{A}$ é o de +z.



Como $\vec{E}$ só tem componente y, os trechos horizontais não contribuem para a integral de

linha de $\vec{E}$. Assim

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = E_y(x+\Delta x)\Delta y - E_y(x)\Delta y$$

Supondo que o retângulo seja pequeno, podemos escrever:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{A} \simeq B_z\,\Delta x\Delta y$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} \simeq \frac{\partial B_z}{\partial t}\Delta x\Delta y$$

Da lei de Faraday, temos

$$[E_y(x+\Delta x)-E_y(x)]\Delta y \simeq -\frac{\partial B_z}{\partial t}\Delta x\Delta y$$

ou

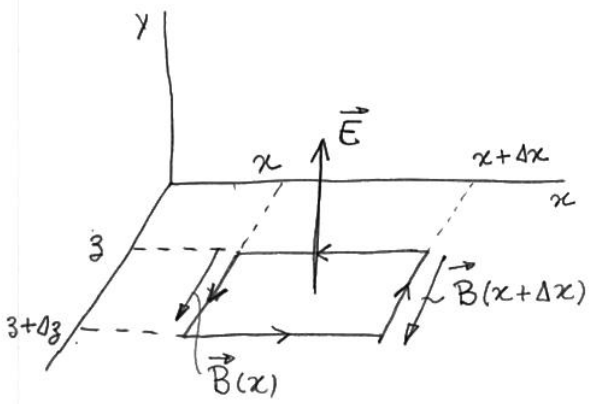
$$\frac{E_y(x+\Delta x)-E_y(x)}{\Delta x} \simeq -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

No limite em que $\Delta x \to 0$ podemos escrever

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad (A)$$

Agora vamos aplicar a lei de Ampère ao retângulo da figura abaixo. Como não há corrente,

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$



Circulando no sentido anti-horário temos

$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = -B_z(x+\Delta x)\Delta z + B_z(x)\Delta z$$

Por outro lado

$$\Phi_E \simeq E_y\Delta x\Delta z$$

$$\frac{d\Phi_E}{dt} \simeq \frac{\partial E_y}{dt}\Delta x\Delta z$$

Da lei de Ampère, temos

$$-[B_z(x+\Delta x)-B_z(x)]\Delta z \simeq \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}\Delta x\Delta z$$

ou

$$\frac{B_z(x+\Delta x)-B_z(x)}{\Delta x} \simeq -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Tomando o limite $\Delta x \to 0$,

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (B)$$

Podemos obter uma eq. diferencial só para E_y derivando (A) em relação a x e (B) em relação a t. Fazendo assim, obtemos:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x\,\partial t}$$

$$\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial t\,\partial x}$$

Como os lados direitos são iguais, podemos escrever

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

que é uma eq. de onda para E_y.

Definindo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

podemos escrever

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Comparando com a eq. de onda em uma corda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

vemos que c é a velocidade de propagação da onda.

Se derivarmos (A) em relação a t e (B) em relação a x, podemos obter uma eq. de onda análoga para B_z:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}$$

Obs: Apesar de termos obtido uma eq. de onda para E_y e outra para B_z, elas não são independentes. Lembre-se que elas vieram das eqs. (A) e (B) que contêm os dois campos. Assim uma onda não pode existir sem a outra. Não existe onda para $\vec{E}$ sem a onda para $\vec{B}$, e vice-versa.

SOLUÇÃO DA EQ. DE ONDA

A solução geral da eq. de onda para E_y é do tipo

$$E_y = f(\omega t \pm kx)$$

onde f é uma função periódica qualquer de $\omega t \pm kx$.

Por exemplo, $\text{sen}(\omega t - kx)$, $\text{tg}(\omega t + kx)$, etc.

Nestas expressões

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

é a frequência angular da onda e

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}$$

é chamado número de onda.

Agora vamos mostrar que $E_y = f(\omega t - kx)$ é solução da eq. de onda.

Vamos fazer

$$u = \omega t - kx$$

de forma que

$$E_y = f(u)$$

Então

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -k \frac{\partial f}{\partial u}$$

Derivando novamente, temos

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-k\frac{\partial f}{\partial u}\right) = -k\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= k^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

Analogamente

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \omega^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

Substituindo na eq. de onda obtemos

$$k^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

Esta eq. é obviamente satisfeita porque $k = \omega/c$.

ONDAS SENOIDAIS

Soluções do tipo

$$E_y = E_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

$$B_z = B_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

são chamadas ondas senoidais ou harmônicas. Elas são importantes porque qualquer onda pode ser escrita como uma combinação de ondas harmônicas com freqüências diferentes por meio de uma série de Fourier.

Para mostrar que E_y e B_z possuem a mesma freqüência, mesma fase e mesmo número de onda, vamos supor que

$$E_y = E_m \operatorname{sen}(\omega_E t - k_E x + \phi_E)$$

$$B_z = B_m \operatorname{sen}(\omega_B t - k_B x + \phi_B)$$

Assim

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -k_E E_m \cos(\omega_E t - k_E x + \phi_E)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \omega_B B_m \cos(\omega_B t - k_B x + \phi_B)$$

Substituindo estes resultados em (A), obtemos

$$k_E E_m \cos(\omega_E t - k_E x + \phi_E) =$$

$$\omega_B B_m \cos(\omega_B t - k_B x + \phi_B)$$

Para que esta equação seja satisfeita para todos os valores de x e t devemos ter

$$k_E = k_B, \quad \omega_E = \omega_B, \quad \phi_E = \phi_B$$

Além disso,

$$kE_m = \omega B_m \Rightarrow E_m = \frac{\omega}{k}B_m$$

$$\Rightarrow E_m = cB_m$$

Por simplicidade, podemos fazer $\phi = 0$, de forma que

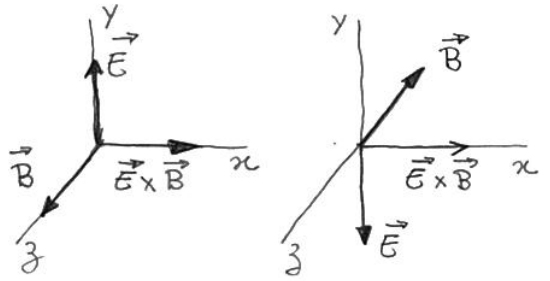
$$\vec{E} = \hat{j}\, E_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

$$\vec{B} = \hat{k}\, B_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

O resultado acima deixa claro mais uma vez que as ondas para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são

totalmente acopladas, uma não existindo sem a outra.

Pode-se observar que independentemente do sinal de $\text{sen}(\omega t - kx)$ o produto vetorial $\vec{E} \times \vec{B}$ aponta no sentido de propagação da onda (no nosso caso, o sentido positivo do eixo x).



$\text{sen}(\omega t - kx) > 0$

$\text{sen}(\omega t - kx) < 0$

Por que

$$E_y = E_m \,\text{sen}(\omega t - kx)$$

representa uma onda propagando para a direita com velocidade c?

Resposta. A crista da onda ocorre na posição e no instante em que $\text{sen}(\omega t - kx) = 1$, ou seja,

$$\omega t - kx = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \text{podia ser } \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$$

A posição da crista no instante t é dada por

$$x = \frac{\omega}{k} t - \frac{\pi}{2k} = ct - \frac{\pi}{2k}$$

Portanto a crista (e é claro, toda a onda) viaja para a direita com velocidade c.

De maneira análoga

$$E_y = E_m \,\text{sen}(\omega t + kx)$$

$$B_z = -B_m \,\text{sen}(\omega t + kx)$$

representa uma onda propagando no sentido $-x$.

Obs. O sinal $-$ em B_z é necessário para que $\vec{E} \times \vec{B}$ aponte para a esquerda. Verifique você mesmo!

DENSIDADE DE ENERGIA

Vimos que as densidades de energia nos campos elétrico e magnético são dadas por

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

No caso de uma onda eletromagnética, B e E estão relacionados pela expressão

$$B = \frac{E}{c} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}\, E$$

Assim

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} \mu_0 \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \equiv u_E$$

Portanto as densidades de energia nos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são iguais.

A densidade de energia

eletromagnética (total) da onda é dada por

$$u = u_E + u_B = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$$

Para uma onda senoidal, por exemplo,

$$u = \epsilon_0 E_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t - kx)$$

Em geral E_y, B_z, e também u, oscilam muitas vezes em um segundo ($f \gg 1$). Neste caso é mais interessante falar em densidade de energia média:

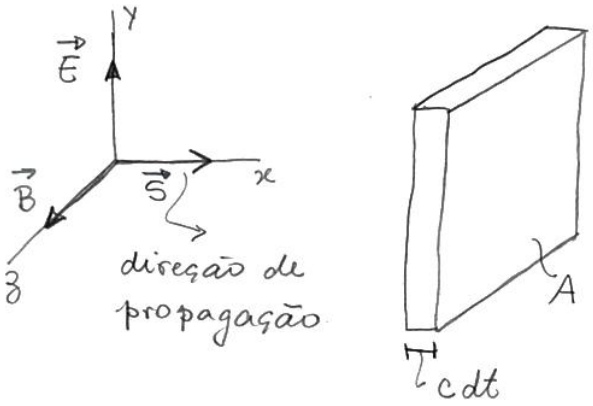
$$u_{med} = \epsilon_0 E_m^2 \left[\operatorname{sen}^2(\omega t - kx)\right]_{med}$$

Como $\left[\operatorname{sen}^2(\omega t - kx)\right]_{med} = \frac{1}{2}$,

$$u_{med} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_m^2$$

VETOR DE POYNTING

Considere uma onda eletromagnética incidindo perpendicularmente sobre a área A da figura abaixo



A quantidade de energia que atravessa a área A em um intervalo de tempo dt é dada por

$$dU = u\,dV = u\,A\,c\,dt$$

O fluxo de energia por área, por tempo, através da superfície é dado por

$$S = \frac{dU}{A\,dt} = uc = c\epsilon_0 E^2$$

Como $E = cB$, podemos escrever

$$S = c^2\epsilon_0 E B = \frac{\epsilon_0}{\mu_0\epsilon_0} E B = \frac{EB}{\mu_0}$$

Define-se o vetor de Poynting, $\vec{S}$, como

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$$

Assim o módulo de $\vec{S}$ dá o fluxo de energia por área, por tempo, e o vetor $\vec{S}$ dá a direção e sentido de propagação da onda

INTENSIDADE

A intensidade da onda é definida como

$$I = S_{med}$$

No caso de uma onda senoidal

$$S = \frac{E_m B_m}{\mu_0} \operatorname{sen}^2(\omega t - kx)$$

de forma que

$$I = \frac{1}{2} \frac{E_m B_m}{\mu_0}$$

ou ainda

$$I = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_m^2}{c} = \frac{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{2\mu_0} E_m^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_m^2$$

Obs. I e S têm unidades de W/m^2 no SI.

PRESSÃO DE RADIAÇÃO

Ondas eletromagnéticas também transportam momento linear. Pode-se mostrar que o momento linear por volume é dado por

$$\frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{\vec{S}}{c^2}$$

Considerando que $dV = A c\, dt$ (fig da pag anterior)

$$d\vec{p} = \frac{\vec{S}}{c} A\, dt$$

No caso da radiação ser totalmente absorvida pela superfície A, a força sobre a superfície é dada por

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\vec{S} A}{c}$$

O módulo da força média é dado por

$$F_{med} = \frac{S_{med} A}{c} = \frac{I A}{c}$$

A pressão que a radiação exerce sobre a superfície (no caso de absorção total) é

$$p_{rad} = \frac{F_{med}}{A} = \frac{I}{c}$$

No caso da onda ser totalmente refletida pela superfície, a pressão de radiação é dada por

$$p_{rad} = \frac{2I}{c}$$

Em geral

$$\frac{I}{c} < p_{rad} < \frac{2I}{c}$$

ONDAS NA MATÉRIA

Ondas eletromagnéticas podem se propagar em meios materiais não condutores, como o vidro, a água, etc. Nestes meios devemos trocar ϵ_0 por ϵ e μ_0 por μ nas eqs. de Maxwell. Dessa forma a velocidade de propagação da onda no meio fica dada por

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}$$

Fazendo

$\epsilon = \epsilon_0 K$ → constante dielétrica

$\mu = \mu_0 K_m$ → permeabilidade relativa

podemos escrever

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 K_m \epsilon_0 K}} = \frac{c}{\sqrt{K_m K}}$$

Exceto para materiais ferromagnéticos,

$$K_m \simeq 1 \Rightarrow v \simeq \frac{c}{\sqrt{K}}$$

Define-se o índice de refração do meio como

$$n = \frac{c}{v}$$

de forma que, se $K_m \simeq 1$,

$$n = \sqrt{K}$$

Como $K > 1$, devemos ter $n > 1$, e portanto $v < c$.

Obs. Em geral K e μ dependem da frequência da onda.

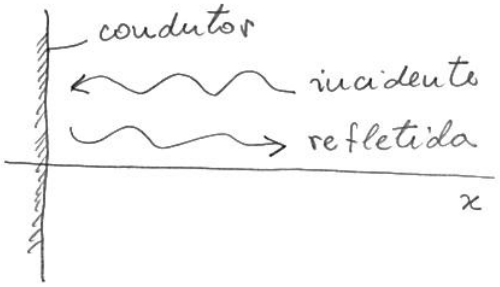
Todas as expressões obtidas anteriormente para u, S, I, etc., continuam válidas, desde que troquemos ϵ_0 por ϵ e μ_0 por μ.

Ondas eletromagnéticas não propagam em meio condutor.

ONDAS ESTACIONÁRIAS

Quando uma onda eletromagnética incide sobre uma superfície condutora ela é refletida. A onda incidente pode combinar com a onda refletida produzindo uma onda estacionária

Considere uma onda que propaga para a esquerda incidindo sobre um plano condutor, que coincide com o plano yz.



As ondas incidente e refletida podem ser escritas como

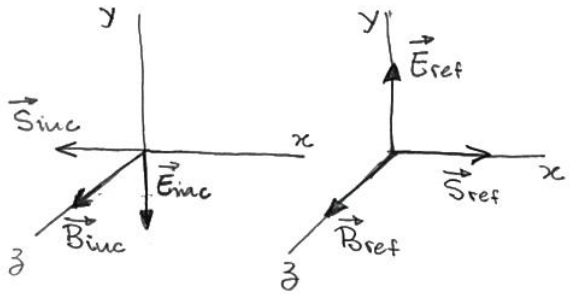
$$\vec{E}_{inc} = -\hat{j} E_m \operatorname{sen}(\omega t + kx)$$ (→ escolha do livro)

$$\vec{E}_{ref} = \hat{j} E'_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

$$\vec{B}_{inc} = \hat{k} B_m \operatorname{sen}(\omega t + kx)$$

$$\vec{B}_{ref} = \hat{k} B'_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

Os sinais antes de $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são escolhidos para que $\vec{S}_{inc}$ seja para a esquerda e $\vec{S}_{ref}$ para a direita. Veja a figura.



Considere o campo elétrico da onda. O campo resultante é dado por

$$\vec{E} = \vec{E}_{inc} + \vec{E}_{ref}$$

Em $x=0$ devemos ter $\vec{E}=0$ porque o plano é condutor. Assim

$$\vec{E}(x=0) = \hat{j}\left[-E_m + E_m'\right]\operatorname{sen}\omega t = 0$$

Para que esta eq. seja satisfeita para qualquer t, devemos ter

$$E_m = E_m'$$

Assim o campo resultante, para qualquer x e qualquer t, é dado por

$$\vec{E} = \hat{j}\,E_m\left[\operatorname{sen}(\omega t - kx) - \operatorname{sen}(\omega t + kx)\right]$$

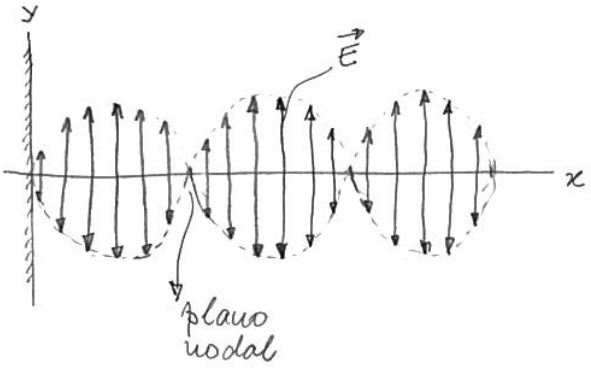
$$= -\hat{j}\,2E_m \operatorname{sen} kx \cos\omega t$$

Esta expressão corresponde a uma onda estacionária que possui planos nodais para

$$\operatorname{sen} kx = 0 \quad \Rightarrow \quad kx = n\pi$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Assim

$$x = \frac{n\pi}{k} = n\pi \times \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{n\lambda}{2}$$



Considere agora o campo magnético. Como $B_m = E_m/c$, $B_m' = E_m'/c$ e $E_m' = E_m$, podemos concluir que $B_m = B_m'$. O campo magnético resultante é dado por

$$\vec{B} = \hat{k}\,B_m\left[\operatorname{sen}(\omega t + kx) + \operatorname{sen}(\omega t - kx)\right]$$

$$= \hat{k}\,2B_m \cos kx \operatorname{sen}\omega t$$

Os planos nodais de $\vec{B}$ ocorrem para

$$\cos kx = 0 \quad \Rightarrow kx = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\pi$$

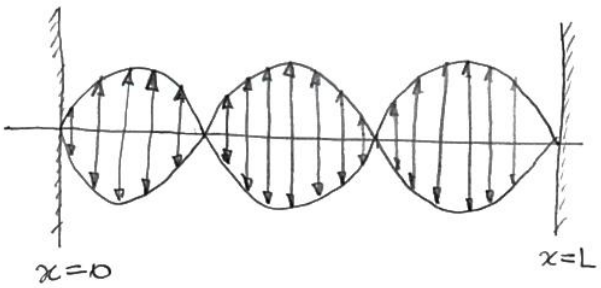
$$x = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$$

Note que os planos nodais de $\vec{B}$ coincidem com os planos onde $\vec{E}$ é máximo.

Quando colocamos duas superfícies condutoras paralelas, uma em $x=0$ e outra em $x=L$, devemos ter $\vec{E}=0$ nestes dois planos. Isto só é possível se

$$L = n\,\frac{\lambda}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2L}{n}$$

A fig. abaixo mostra o campo $\vec{E}$ de uma onda estacionária para $n=3$



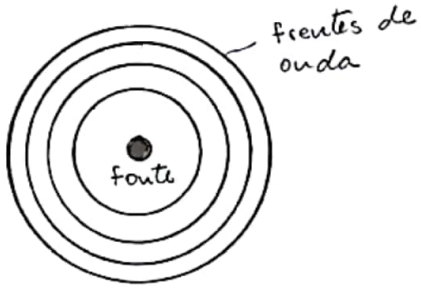
$$\lambda = \frac{2L}{3}$$

3. NATUREZA E PROPAGAÇÃO DA LUZ

FRENTE DE ONDA

É uma superfície onde a grandeza que ondula (o campo elétrico, por exemplo) possui fase constante.

Para uma fonte puntiforme emitindo ondas em um meio homogêneo e isotrópico as frentes de onda são superfícies esféricas.



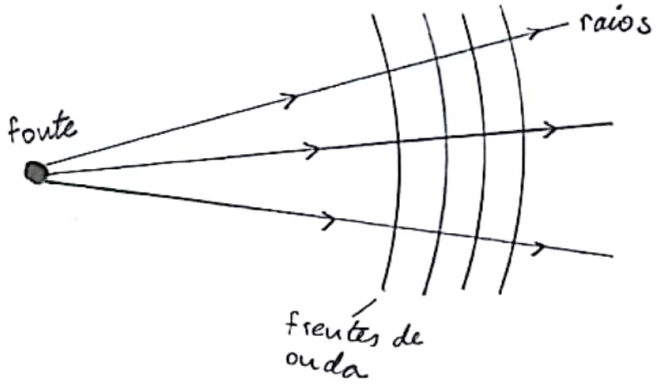
Em geral representa-se apenas as frentes correspondentes às cristas da onda, onde a grandeza que ondula assume o valor máximo.

RAIO DE LUZ

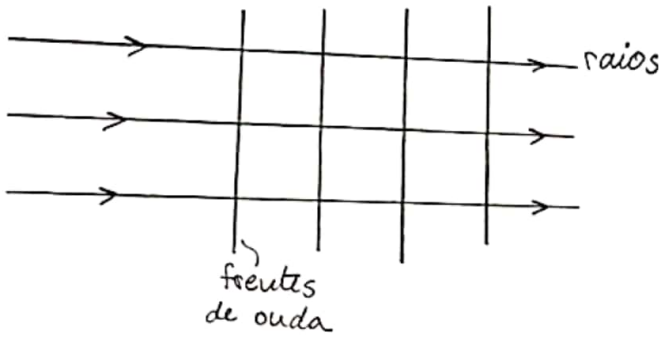
É uma linha imaginária ao longo da direção de propagação da onda.

Para meios homogêneos e isotrópicos os raios são perpendiculares às frentes de onda.

Para uma fonte pontual

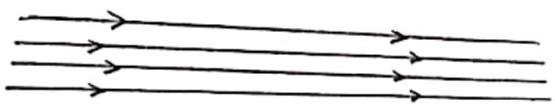


Note que muito longe da fonte as frentes de onda são quase planas e os raios quase paralelos



FEIXE DE LUZ

É um conjunto de raios próximos um do outro.



Muitas vezes representamos um feixe por um único raio.

Digitalizado com CamScanner

ÓTICA GEOMÉTRICA

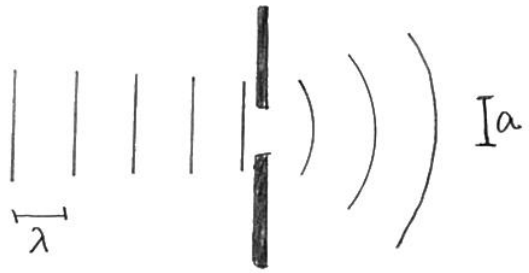
Descreve os fenômenos óticos através do conceito de raio de luz.

ÓTICA ONDULATÓRIA

Leva em consideração a natureza ondulatória da luz.

LIMITE DA ÓTICA GEOMÉTRICA

se $\lambda \gtrsim a$, a difração (espalhamento da luz ao passar por um orifício) se torna importante. Neste caso temos que usar a ótica ondulatória

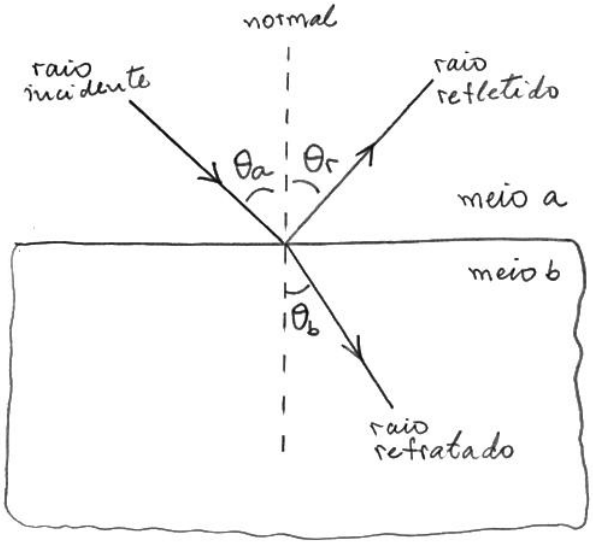


Se $\lambda << a$, a difração pode ser desprezada e pode-se usar o conceito de raio de luz. A ótica geometrica é valida.



Quando uma onda de luz incide sobre a superficie que separa dois meios transparentes ela é parcialmente refletida e parcialmente refratada (trausmitida). Se a superficie for lisa, ocorre o que chamamos de reflexão especular, descrita pelas leis abaixo.

LEIS DA REFLEXÃO E REFRAÇÃO



$\theta_a \rightarrow$ ângulo de incidência
$\theta_r \rightarrow$ ângulo de reflexão
$\theta_b \rightarrow$ ângulo de refração

Chama-se plano de incidência ao plano que contém o raio incidente e a normal à superficie.

LEI DA REFLEXÃO

O raio refletido está no plano de incidência e

$$\theta_r = \theta_a$$

LEI DA REFRAÇÃO

O raio refratado está contido no plano de incidência e

$$n_a \operatorname{sen} \theta_a = n_b \operatorname{sen} \theta_b$$

onde n_a e n_b são os índices de refração dos meios a e b. Lembre-se que o índice de refração é definido como

$$n = c/v$$

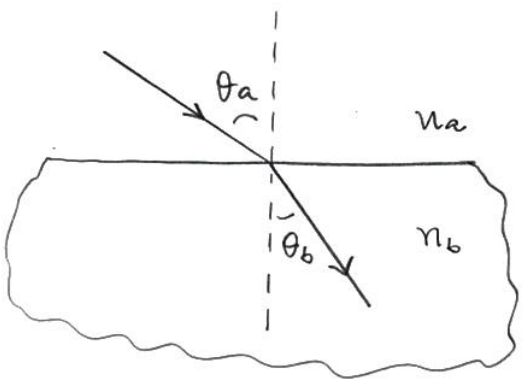
onde v é a velocidade da luz no meio. A lei da refração é também chamada lei de Snell.

Por definição, o índice de refração do vácuo é $n_{vac} = 1$. Para qualquer meio material, $n > 1$ (uma vez que $v < c$). Para o ar $n_{ar} \simeq 1$.

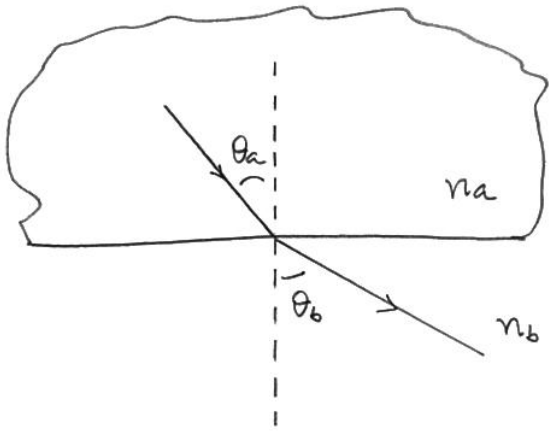
Da lei da refração

$$\operatorname{sen}\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\operatorname{sen}\theta_a$$

(1) se $n_b > n_a$, $\operatorname{sen}\theta_b < \operatorname{sen}\theta_a$, e portanto, $\theta_b < \theta_a$. Assim, o raio se aproxima da normal ao mudar de meio



(2) se $n_b < n_a$, $\operatorname{sen}\theta_b > \operatorname{sen}\theta_a$, e portanto, $\theta_b > \theta_a$. O raio se afasta da normal.

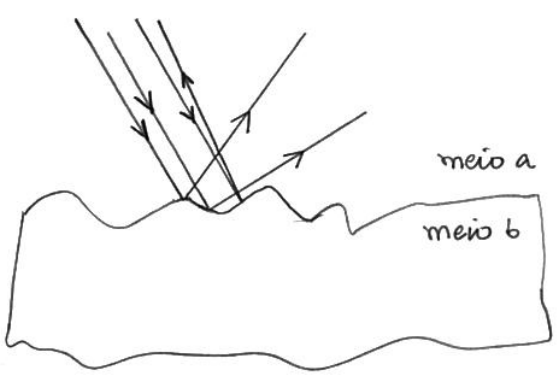


As leis da reflexão e da refração foram descobertas experimentalmente, mas podem ser deduzidas a partir das equações de Maxwell.

As intensidades relativas dos feixes refletido e refratado dependem do ângulo de incidência e dos índices de refração, e também podem ser deduzidas das equações de Maxwell.

REFLEXÃO DIFUSA

Quando a superfície que separa os dois meios é rugosa, a normal não é bem definida e as leis da reflexão e refração não podem ser aplicadas. Neste caso a reflexão é dita difusa.



A freqüência da onda não muda quando ela passa de um meio para o outro mas o comprimento de onda muda. Como $\lambda = v/f$ e $v = c/n$, podemos escrever

$$\lambda = \frac{c}{fn} = \frac{\lambda_0}{n}$$

onde $\lambda_0 = c/f$ é o comprimento de onda no vácuo.

Quando a luz passa do meio a para o meio b, temos

$$\lambda_a = \lambda_0/n_a \quad \text{e} \quad \lambda_b = \lambda_0/n_b$$

de forma que

$$\frac{\lambda_b}{\lambda_a} = \frac{n_a}{n_b}$$

Portanto, o comprimento de onda é maior no meio de menor índice de refração.

REFLEXÃO INTERNA TOTAL

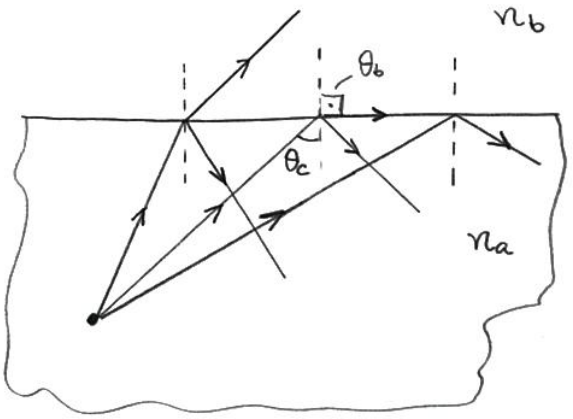
Quando um feixe de luz incide de meio com n_a maior para um meio com n_b menor pode ocorrer um fenômeno chamado reflexão interna total. O ângulo de refração é maior que o ângulo de incidência e para θ_a maior que um ângulo crítico, θ_c, não há raio refratado. Exatamente para $\theta_a = \theta_c$, o raio refratado é tangente à interface, ou seja, $\theta_b = 90°$. Assim

$$n_a \operatorname{sen}\theta_c = n_b \operatorname{sen} 90° = n_b$$

ou

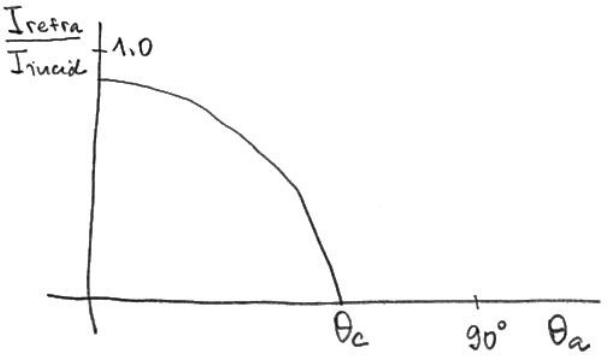
$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_b}{n_a}$$

Para $\theta_a < \theta_c$ existem os feixes refletido e refratado



Obs: não há reflexão interna total quando o feixe incide do meio com n_a menor para o meio com n_b maior.

Uma análise baseada nas eqs. de Maxwell mostra que a intensidade do feixe refratado tende a zero quando $\theta_a \to \theta_c$.

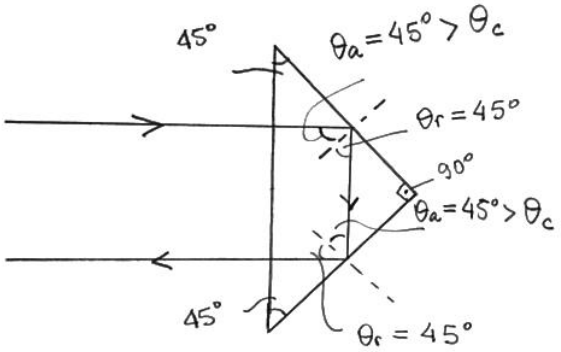


REFLEXÃO INTERNA TOTAL EM UM PRISMA DE VIDRO

Vidros, em geral, possuem $n > 1,5$. Assim, para uma interface vidro–ar,

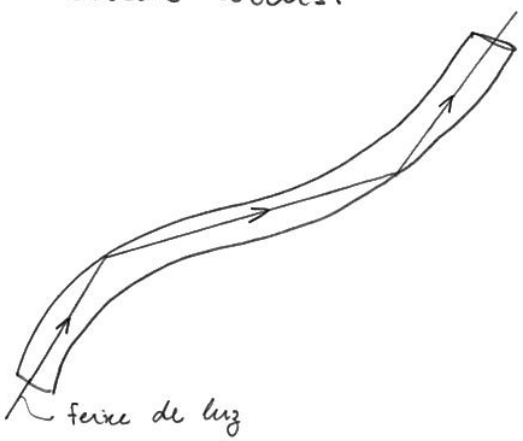
$$\text{sen}\,\theta_c < \frac{1}{1,5} \Rightarrow \theta_c < 42°$$

Para o prisma abaixo existem duas reflexões internas totais, de forma que o feixe de luz é totalmente refletido (sem perdas)

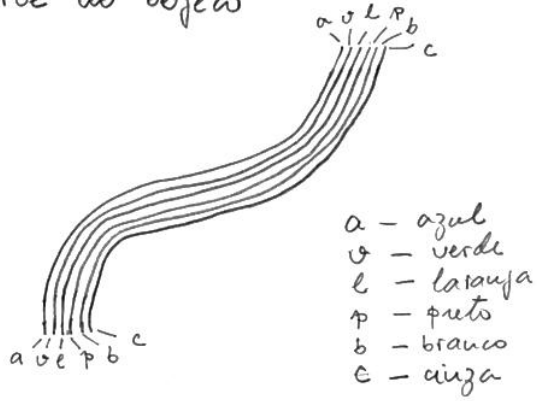


FIBRAS ÓTICAS

A luz pode percorrer um caminho curvo em uma fibra ótica através de reflexões internas totais.



Um feixe de fibras óticas muito finas pode ser usado para transmitir imagens (com aplicações em medicina). Cada fibra transmite a imagem de uma parte do objeto



DISPERSÃO

Em geral o índice de refração depende do comprimento de onda. Para quase todos os materiais, n diminui quando λ aumenta. Para a luz visível, em especial, temos:

$$\lambda_{azul} < \lambda_{verde} < \lambda_{vermelho}$$

$$\Rightarrow n_{azul} > n_{verde} > n_{vermelho}$$

Da lei de Snell

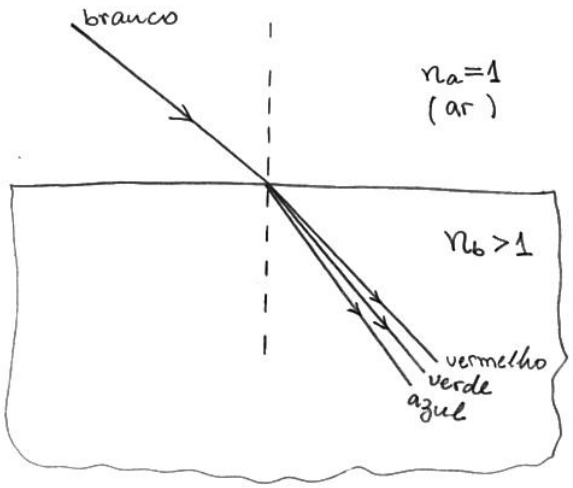
$$\text{sen}\,\theta_b = \frac{n_a}{n_b}\,\text{sen}\,\theta_a$$

Supondo que o meio a seja o ar ($n_a = 1$)

$$\text{sen}\,\theta_b = \frac{1}{n_b}\,\text{sen}\,\theta_a$$

Desta relação vemos que, quanto maior for n_b, menor será θ_b, e portanto, maior será o desvio do feixe. Assim quando luz branca

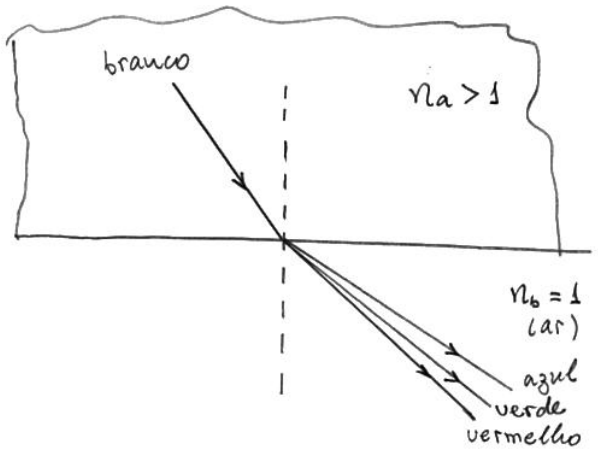
proveniente do ar atinge a superfície de separação com outro meio (vidro ou água, por exemplo) a componente azul da luz se desvia mais que a verde, a verde mais que a vermelha, etc. Esta separação dos componentes correspondentes às diversas cores da luz branca é chamada dispersão.



se o meio b é que for o ar, temos

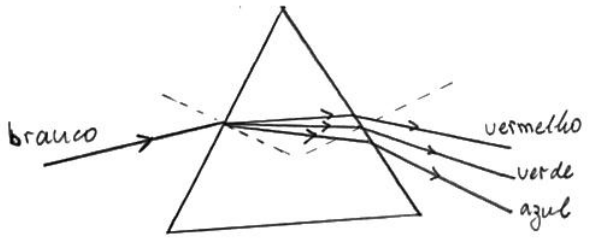
$$\operatorname{sen}\theta_b = n_a \operatorname{sen}\theta_a$$

Neste caso, θ_b será maior para n_a maior (λ menor). Novamente o azul desvia mais e o vermelho menos



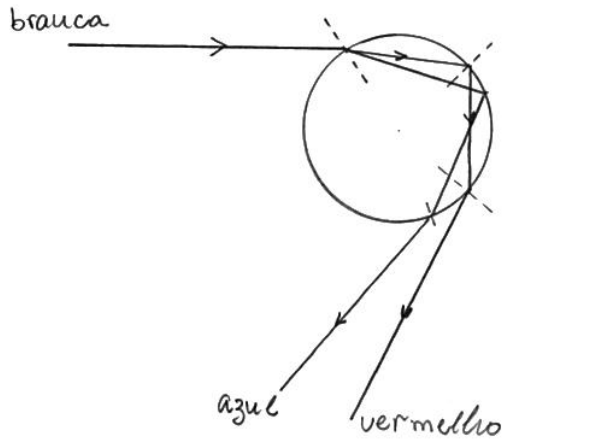
PRISMA

Quando luz branca incide sobre um prisma com seção triangular ocorrem dispersões em duas faces, aumentando a separação do feixe.



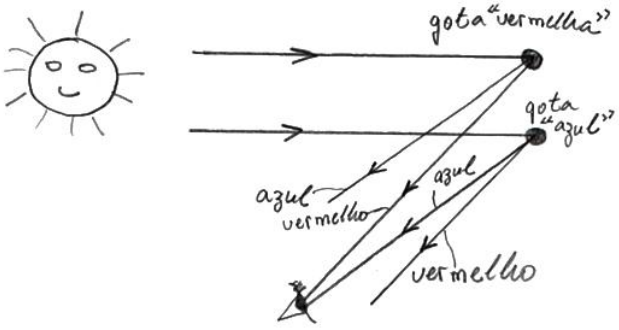
ARCO ÍRIS

Após duas refrações e uma reflexão interna (não total) em uma gota d'água ocorre a dispersão da luz branca proveniente do Sol.



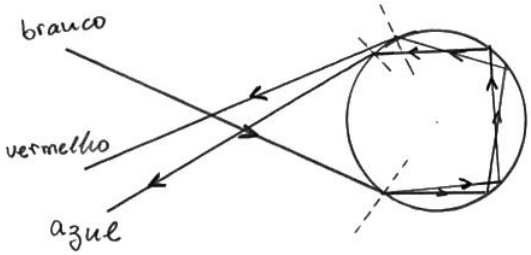
Veja os valores dos ângulos no livro.

Na verdade, uma pessoa no solo vê o feixe azul de uma gota e o feixe vermelho de outra gota. Para esta pessoa, a gota de baixo é azul e a de cima vermelha.



ARCO-ÍRIS SECUNDÁRIO

Agora são duas refrações e duas reflexões internas



Ao contrário do que ocorre no arco-íris primário, é o feixe azul que fica em baixo. O observador verá a gota azul em cima e a vermelha em baixo.

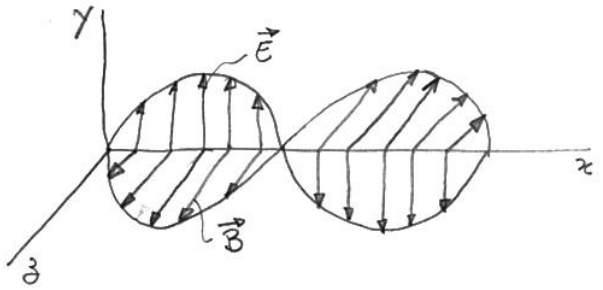
O arco-íris secundário é mais fraco porque em cada reflexão interna (que não é total) há uma perda de intensidade no feixe. Como no arco-íris secundário há uma reflexão a mais, a perda total é maior.

POLARIZAÇÃO

Uma onda eletromagnética dada por

$$\vec{E} = \hat{j}\, E_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$
$$\vec{B} = \hat{k}\, B_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

é dita linearmente polarizada na direção y. A direção de polarização é definida como sendo a direção do campo elétrico.



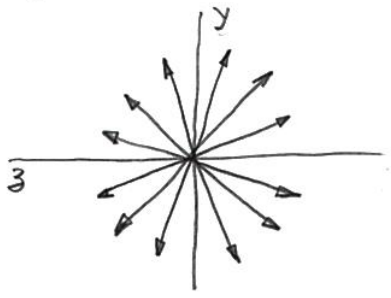
Uma luz com campos elétrico e magnético dados por

$$\vec{E} = -\hat{k}\, E_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$
$$\vec{B} = \hat{j}\, B_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

é polarizada linearmente na direção z.

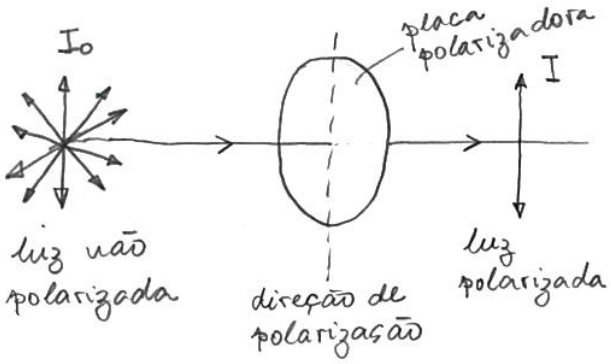
LUZ NATURAL

A luz solar, ou a luz emitida por uma lâmpada, é uma superposição de feixes polarizados em direções aleatórias, e por isso é dita não polarizada (ou natural).



FILTRO POLARIZADOR
(ou placa polarizadora)

É um dispositivo que deixa passar grande parte de uma das componentes da luz não polarizada e uma fração muito pequena da outra componente. Um filtro polarizador ideal deixa passar 100% de uma componente e 0% da outra.



Para a luz não polarizada as componentes E_y e E_z do campo resultante são iguais. Assim

$$E^2 = E_y^2 + E_z^2$$

com $E_y = E_z$. Do cap. 33, para a luz natural,

$$I_0 = \frac{1}{2\mu_0 c}(E_y^2 + E_z^2) = \frac{1}{2\mu_0 c} 2E_y^2$$

Para luz polarizada na direção y,

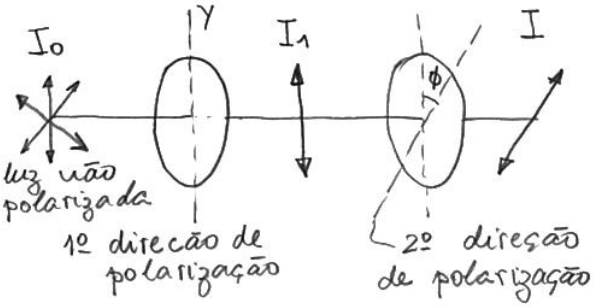
$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_y^2$$

Portanto,

$$I = \frac{1}{2} I_0$$

A intensidade cai à metade quando a luz passa pela placa polarizadora (ideal)

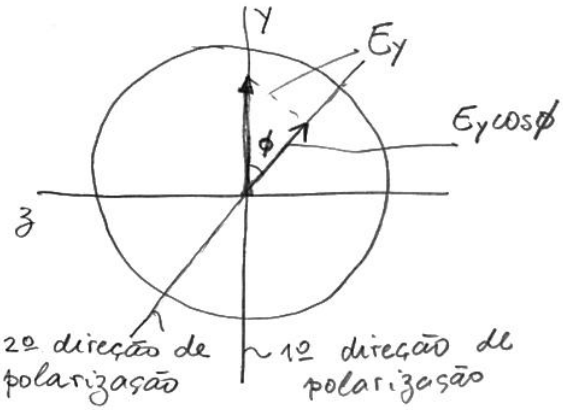
DUAS PLACAS POLARIZADORAS GIRADAS DE UM ÂNGULO ϕ



Vamos supor que na 1º placa só passe a componente y. Assim

$$I_1 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_y^2 = \frac{1}{2} I_0$$

Na segunda placa, a componente de E_y ao longo da nova direção de polarização é dada por $E_y \cos\phi$.



A intensidade final é

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c}(E_y \cos\phi)^2 = I_1 \cos^2\phi$$

Em termos de I_0,

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\phi$$

O valor máximo de I ocorre quando $\phi = 0$ e é dado por

$$I_{max} = \frac{1}{2} I_0$$

É comum expressar a intensidade final como

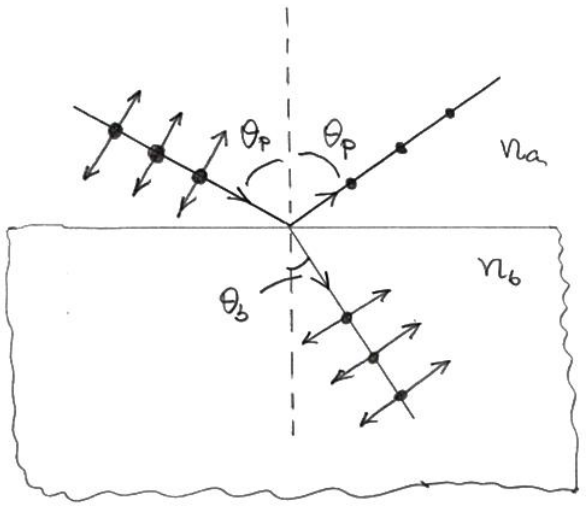
$$I = I_m \cos^2 \phi$$

que é conhecida como lei de Malus.

No caso em que $\phi = 90°$ (polarizadores cruzados), temos $I = 0$.

POLARIZAÇÃO POR REFLEXÃO

Considere luz não polarizada incidindo sobre uma superfície que separa dois meios. Para a maioria dos ângulos de incidência, a componente da luz com $\vec{E}$ perpendicular ao plano de incidência possui uma fração refletida maior que a componente com $\vec{E}$ paralelo ao plano. Em particular, para um ângulo chamado ângulo de polarização ou ângulo de Brewster (θ_p), a luz refletida é 100% polarizada na direção perpendicular ao plano de incidência. A luz refratada possui ambas as componentes mas a componente com $\vec{E}$ no plano de incidência é mais intensa.



Verifica-se que para $\theta_a = \theta_p$ os raios refratado e refletido são perpendiculares entre si. Assim

$$\theta_p + \theta_b = 90°$$

Da lei da refração

$$n_a \operatorname{sen} \theta_p = n_b \operatorname{sen}(90° - \theta_p)$$
$$= n_b \cos \theta_p$$

Portanto

$$\operatorname{tg} \theta_p = \frac{n_b}{n_a}$$

Esta expressão é conhecida como lei de Brewster. Embora tenha sido descoberta experimentalmente, ela pode ser obtida das equações de Maxwell.

LUZ LINEARMENTE POLARIZADA

Sejam duas ondas linearmente polarizadas nas direções y e z e propagando na

direção $+x$. Os campos elétricos são dados por

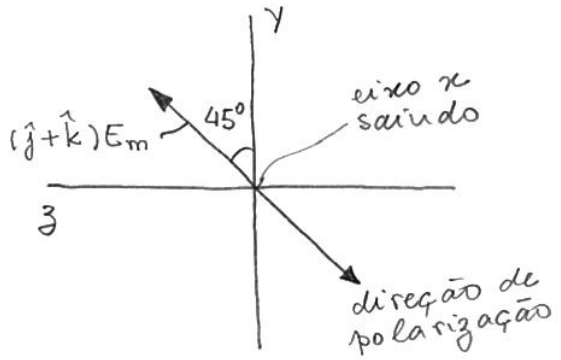
$$\vec{E}_1 = \hat{j}\, E_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{k}\, E_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

O campo elétrico da onda resultante é dado por

$$\vec{E} = (\hat{j}+\hat{k})\, E_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

A onda resultante é linearmente polarizada na direção indicada na figura e possui amplitude $\sqrt{2}\,E_m$.



LUZ CIRCULARMENTE POLARIZADA

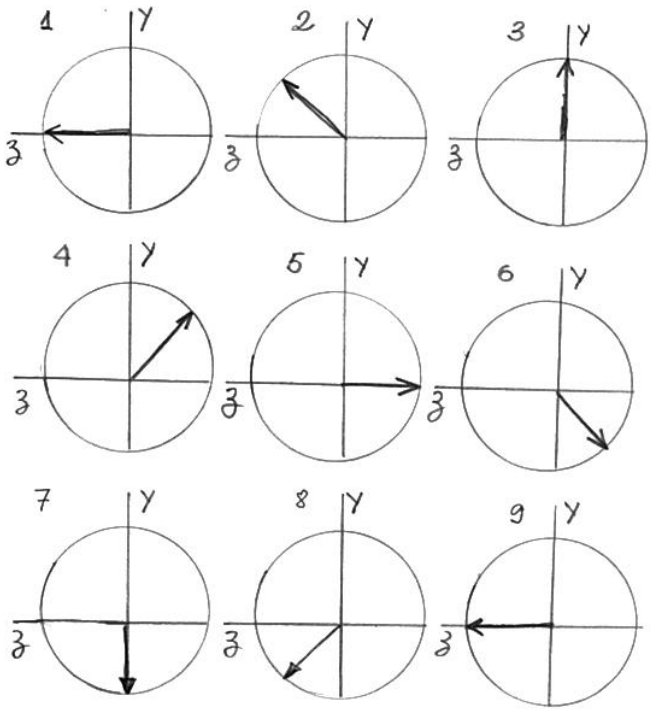
Agora vamos supor que as ondas 1 e 2 estejam defasadas de 90°:

$$\vec{E}_1 = \hat{j}\, E_m \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

$$\vec{E}_2 = \hat{k}\, E_m \operatorname{sen}(\omega t - k + 90^\circ)$$

A tabela abaixo é usada para desenhar o vetor $\vec{E}$ (resultante) em alguns instantes.

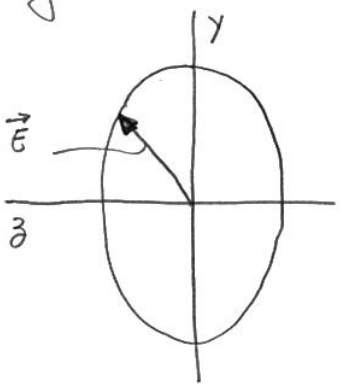
$\omega t - kx$	$\omega t - kx + 90^\circ$	E_1	E_2
0°	90°	0	E_m
45°	135°	$E_m/\sqrt{2}$	$E_m/\sqrt{2}$
90°	180°	E_m	0
135°	225°	$E_m/\sqrt{2}$	$-E_m/\sqrt{2}$
180°	270°	0	$-E_m$
225°	315°	$-E_m/\sqrt{2}$	$-E_m/\sqrt{2}$
270°	360°	$-E_m$	0
315°	405°	$-E_m/\sqrt{2}$	$E_m/\sqrt{2}$
360°	450°	0	E_m



O módulo de $\vec{E}$ permanece igual a E_m mas a sua direção gira no sentido horário para um observador que vê a onda se aproximando. A onda é dita circularmente polarizada direita ou dextrógira. Se a rotação fosse no sentido anti-horário a onda seria dita circularmente polarizada esquerda ou levógira.

LUZ ELIPTICAMENTE POLARIZADA

Se as amplitudes E_1 e E_2 forem diferentes, o vetor $\vec{E}$ gira formando uma elipse. A luz é dita elipticamente polarizada.



Se a diferença de fase entre $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ for diferente de 90° a luz também será elipticamente polarizada, mesmo que $E_1 = E_2$ (em módulo). Veja as figuras do problema 34.51 (não precisa resolver o problema).

ESPALHAMENTO

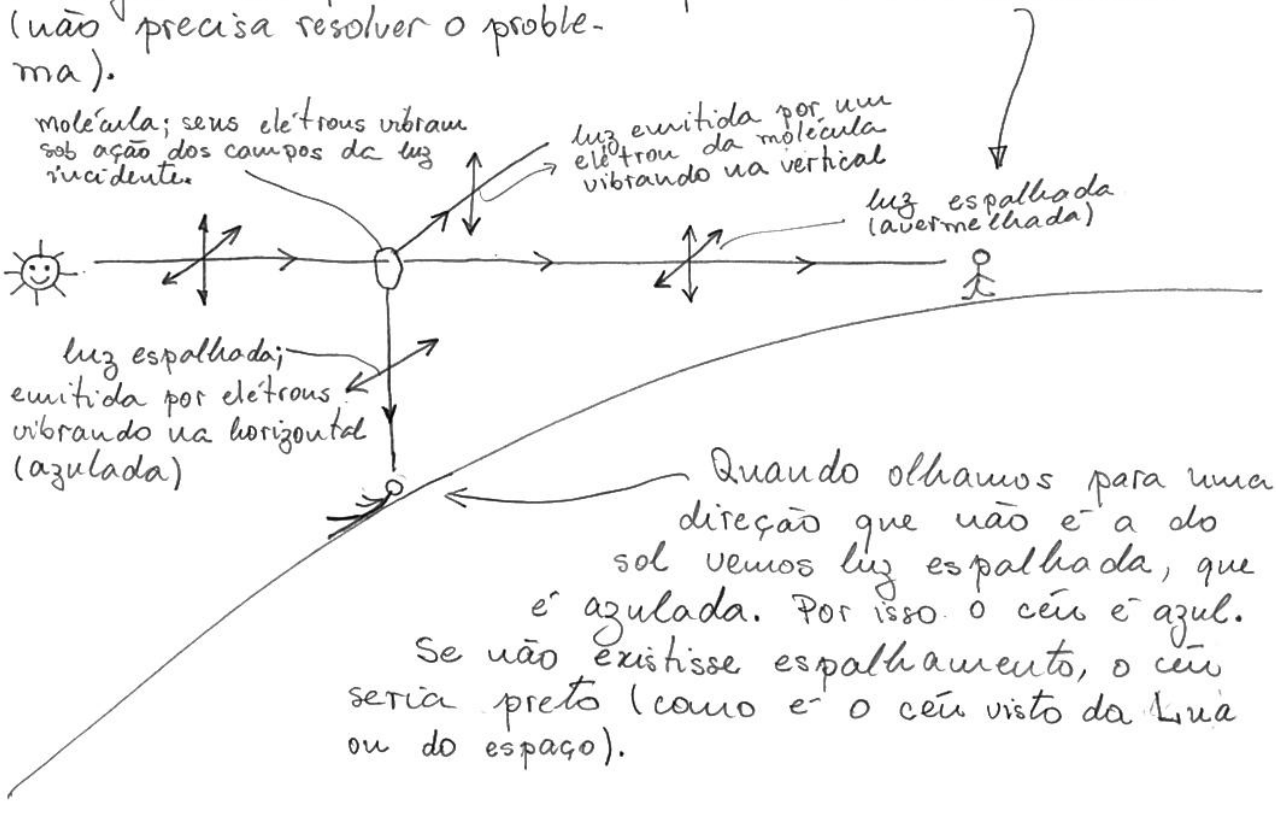
O espalhamento de luz pelas moléculas da atmosfera (fig abaixo) é proporcional a f^4, ou inversamente proporcional a λ^4. Assim

$$\frac{I_{espalh,\,azul}}{I_{espalh,\,verm}} = \left(\frac{\lambda_{verm}}{\lambda_{azul}}\right)^4$$

$$\simeq \left(\frac{700\,nm}{400\,nm}\right)^4 \sim 9$$

Portanto a luz azul espalha muito mais que a luz vermelha.

Quando olhamos diretamente para o Sol no "por do sol" vemos mais a luz vermelha que é menos espalhada. Por isso, o poente é avermelhado.

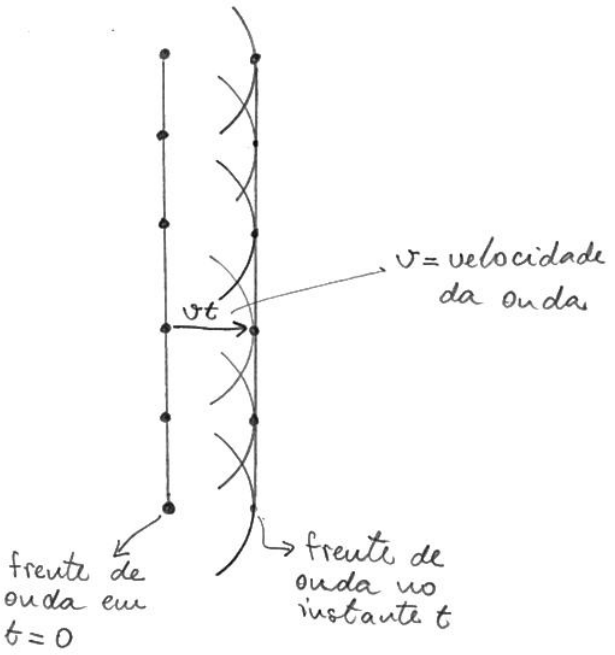


Quando olhamos para uma direção que não é a do sol vemos luz espalhada, que é azulada. Por isso o céu é azul.

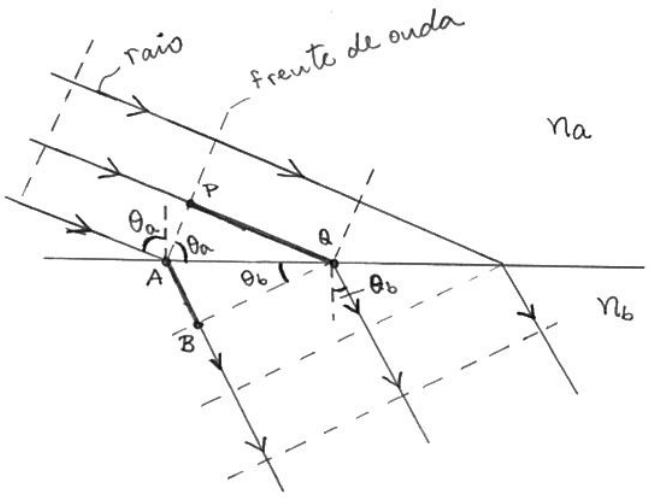
Se não existisse espalhamento, o céu seria preto (como é o céu visto da Lua ou do espaço).

PRINCÍPIO DE HUYGENS (1678)

«Todos os pontos de uma frente de onda são fontes de ondas esféricas secundárias. A nova frente de onda, em um instante posterior, é a superfície tangente às ondas secundárias.



LEI DA REFRAÇÃO



$\overline{PQ} = v_a t$ — velocidade no meio a

$\overline{AB} = v_b t$ — velocidade no meio b

$$\operatorname{sen}\theta_a = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} \qquad \operatorname{sen}\theta_b = \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \frac{v_a}{v_b}$$

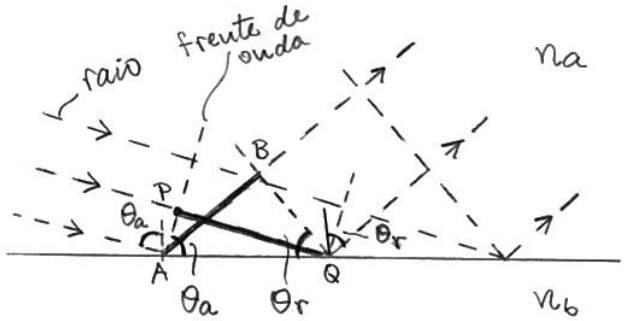
Como $n = c/v$,

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_a}{\operatorname{sen}\theta_b} = \frac{n_b}{n_a}$$

ou $n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$

que é a lei da refração.

LEI DA REFLEXÃO



$$\left.\begin{aligned}\overline{PQ} &= v_a t \\ \overline{AB} &= v_a t\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{PQ} = \overline{AB}$$

$$\operatorname{sen}\theta_a = \frac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}} \qquad \operatorname{sen}\theta_r = \frac{\overline{AB}}{\overline{AQ}}$$

Como $\overline{PQ} = \overline{AB}$,

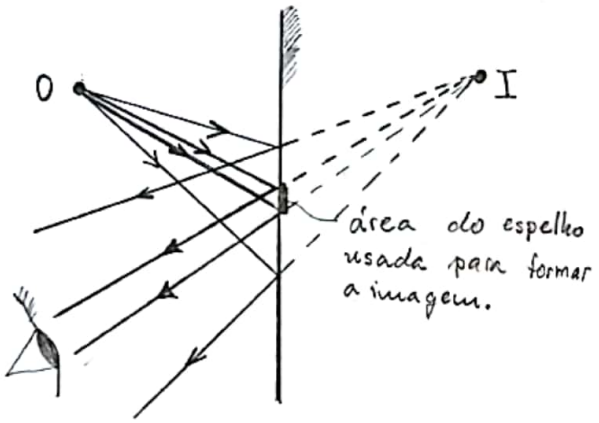
$\operatorname{sen}\theta_a = \operatorname{sen}\theta_r$,

ou $\theta_a = \theta_r$

que é a lei da reflexão.

4. ÓTICA GEOMÉTRICA

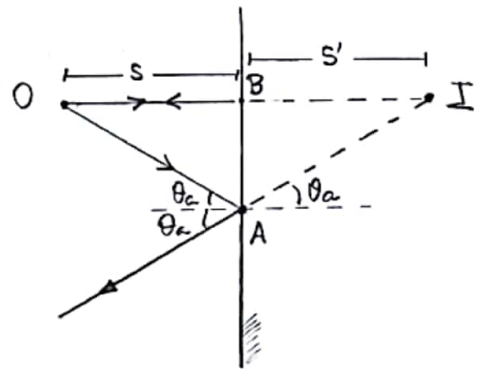
IMAGEM DE UM OBJETO PONTUAL EM UM ESPELHO PLANO



Os raios provenientes de O são refletidos pelo espelho e os prolongamentos dos raios refletidos passam todos pelo ponto I. O observador tem a sensação de que os raios que chegam ao seu olho são provenientes de I. O ponto I é chamado imagem do objeto O. Na prática, apenas um conjunto de raios próximos, que atingem o olho, são utilizados para formar a imagem. Uma vez que os raios luminosos não passam pelo ponto I (apenas os seus prolongamentos passam), a imagem é dita virtual. Quando os próprios raios passam pelo ponto I, a imagem é dita real.

DISTÂNCIA DA IMAGEM AO ESPELHO

Pela semelhança dos triângulos OAB e IAB (têm um lado em comum e três ângulos iguais) podemos concluir que $\overline{OB} = \overline{IB}$.



Existe uma convenção de sinais que vale para espelhos (planos e esféricos), superfícies refratoras e lentes. As regras são:

(1) Quando o objeto está do lado da luz que incide sobre a superfície (refletora ou refratora) a distância do objeto é positiva; caso contrário ela é negativa.

(2) Quando a imagem está do lado do raio de luz que emerge da superfície (refletora ou refratora) a distância da imagem é positiva; caso contrário ela é negativa.

(3) No caso de superfícies esféricas pode-se definir um centro de curvatura e um raio de curvatura. Se o centro estiver do lado do raio emergente, o raio de curvatura é positivo; caso contrário ele é negativo.

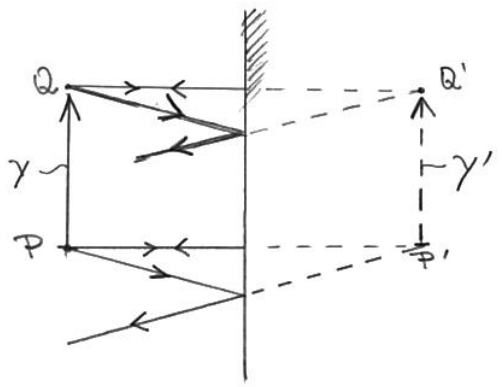
Digitalizado com CamScanner

No caso de um espelho plano, a distância do objeto é positiva e a distância da imagem é negativa (virtual). Assim podemos escrever

$$s' = -s$$

IMAGEM DE UM OBJETO EXTENSO

Podemos dividir um objeto extenso em várias partes pequenas, cada uma delas representando um objeto pontual. A imagem do objeto é construída ajuntando-se as imagens das partes. Na maioria das vezes, pode-se definir as características da imagem de um objeto a partir das imagens de pontos situados nos seus extremos. Por exemplo, para definir a imagem da seta da figura abaixo basta obter as imagens dos pontos P e Q situados nas suas extremidades.



AMPLIAÇÃO TRANSVERSAL

É definida como sendo a razão entre as alturas da imagem e do objeto:

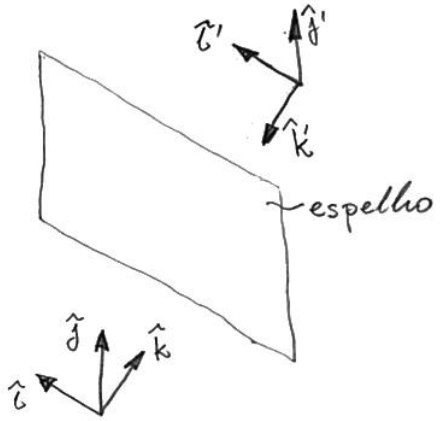
$$m = \frac{y'}{y}$$

Para um espelho plano $y' = y$, de forma que

$$m = 1$$

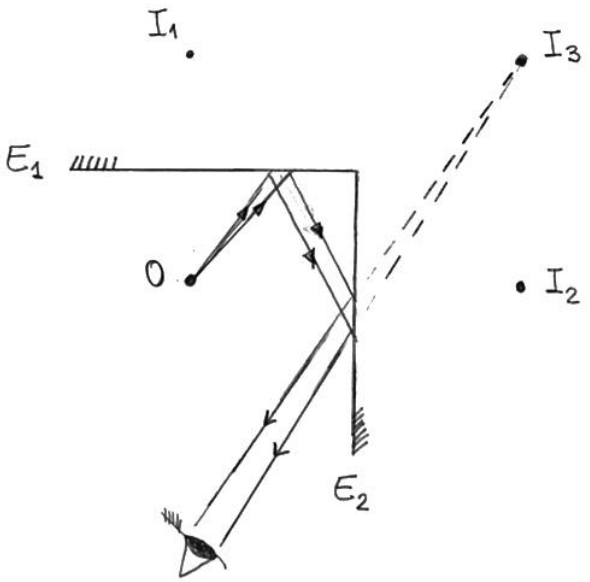
IMAGEM REVERSA

Um espelho plano inverte um objeto na dimensão perpendicular ao espelho mas não nas dimensões paralelas. A imagem formada é dita reversa. Por exemplo, a imagem de um sistema de coordenadas dextrógiro é um sistema levógiro.



Note que $\hat{i} = \hat{i}$, $\hat{j}' = \hat{j}$ e $\hat{k}' = -\hat{k}$. Assim $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ (sistema dextrógiro) enquanto $\hat{i}' \times \hat{j}' = -\hat{k}'$ (sistema levógiro).

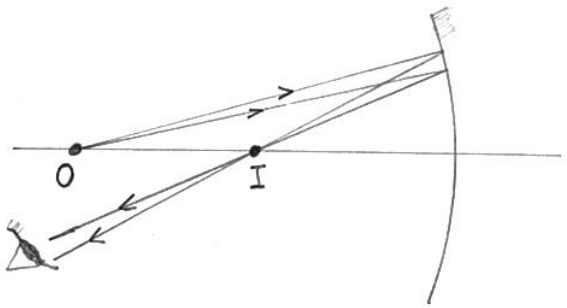
IMAGENS FORMADAS POR DOIS ESPELHOS



Os espelhos E_1 e E_2 formam as imagens I_1 e I_2 (os raios não são mostrados). A imagem I_3 é produzida por reflexões sucessivas nos espelhos E_1 e E_2. Veja que I_3 é a imagem de I_1 formada pelo espelho E_2, ou alternativamente, a imagem de I_2 formada pelo espelho E_1. Em geral, a imagem de um objeto em um espelho pode servir como "objeto" para formar outra imagem em outro espelho.

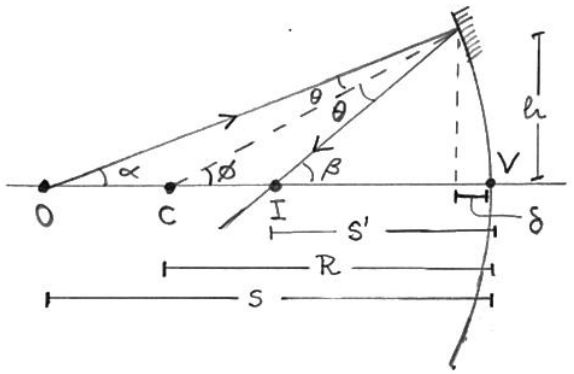
FORMAÇÃO DE IMAGEM EM UM ESPELHO ESFÉRICO

Os raios provenientes do objeto O na figura abaixo passam (aproximadamente) pelo ponto I, de forma que o observador tem a impressão de estar vendo o objeto no ponto I (imagem). Na figura, os raios refletidos passam de fato por I, de forma que a imagem é real.



POSIÇÃO DA IMAGEM

Vamos mostrar que todos os raios provenientes de O passam (aproximadamente) por I, desde que α (fig abaixo) seja pequeno. Na figura, C é o centro de curvatura e V é o vértice do espelho. s é a distância do objeto (ao espelho) e s' é a distância da imagem. R é o raio de curvatura.



Teorema. Um ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes.

Deste teorema:

$$\phi = \alpha + \theta$$

$$\beta = \alpha + 2\theta$$

Eliminando θ das duas equações, temos

$$\alpha + \beta = 2\phi \qquad (1)$$

Os ângulos são dados por:

$$tg\,\alpha = \frac{h}{s - \delta}$$

$$tg\,\beta = \frac{h}{s' - \delta}$$

$$tg\,\phi = \frac{h}{R - \delta}$$

Se α for pequeno, β e ϕ também são pequenos. Além disso, δ também é desprezível. Assim,

$$\alpha \simeq tg\,\alpha \simeq \frac{h}{s}$$

$$\beta \simeq tg\,\beta \simeq \frac{h}{s'}$$

$$\phi \simeq tg\,\phi \simeq \frac{h}{R}$$

Substituindo estes resultados em (1) e dividindo por h, obtemos

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \qquad (2)$$

Como o resultado acima não depende de α, todos os raios provenientes de O passam (aproximadamente) por I.

Os raios para os quais α é pequeno (e a aproximação acima é válida) são ditos raios paraxiais.

Se o objeto estiver muito distante ($s \to \infty$), $\alpha \to 0$ e os raios incidentes são paralelos ao eixo ótico. A eq. (2) leva a

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \Rightarrow s' = \frac{R}{2}$$

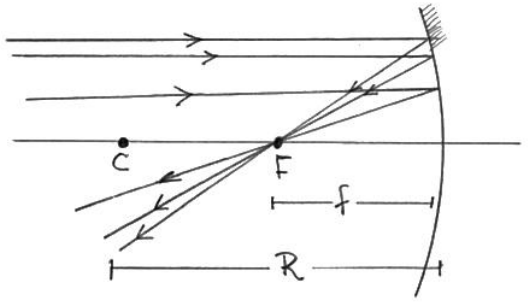
A distância

$$f = \frac{R}{2}$$

é chamada distância focal do espelho. A Eq. (2) pode ser reescrita em termos de f como

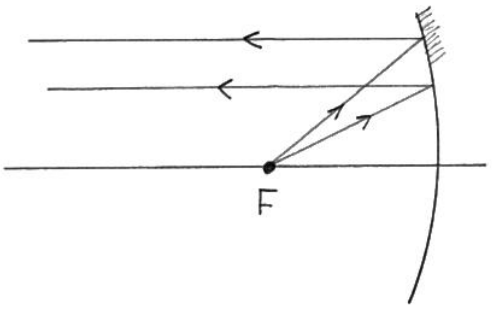
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad (3)$$

Então concluímos que raios que incidem paralelos ao eixo ótico convergem para o ponto F, chamado foco.



Da Eq. (3) pode-se ver que raios provenientes do foco são refletidos paralelamente ao eixo ótico. Fazendo $s = f$, temos

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad s' = \infty.$$



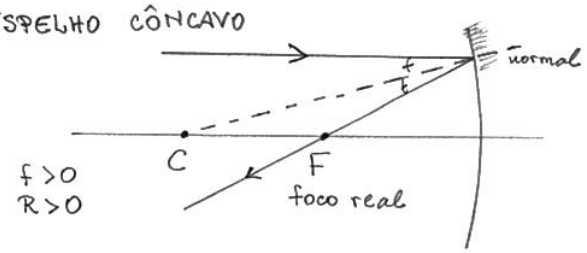
A posição da imagem de um objeto formada em um espelho esférico é dada pela Eq. (3). Ela foi deduzida para o caso de um espelho côncavo com o objeto situado além do centro de curvatura ($s > R$) mas é válida em geral, desde que se adote a convenção de sinais da página 1.

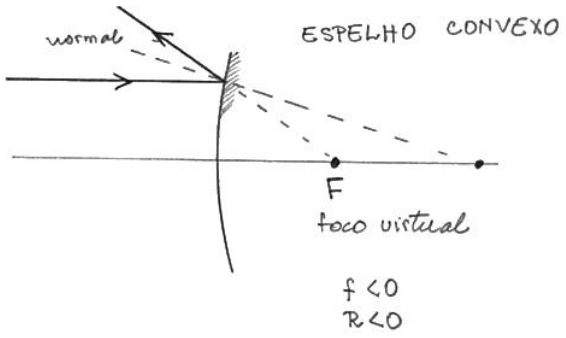
RAIOS PRINCIPAIS

Pode-se obter graficamente a imagem de um objeto formada em um espelho esférico traçando alguns raios especiais, chamados raios principais. São eles:

(1) Um raio que incide paralelo ao eixo ótico é refletido passando pelo foco. No caso de um espelho convexo, é o prolongamento do raio que passa pelo foco.

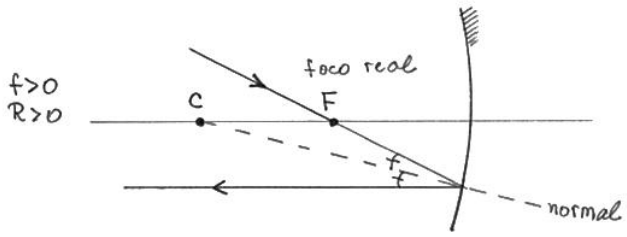
ESPELHO CÔNCAVO

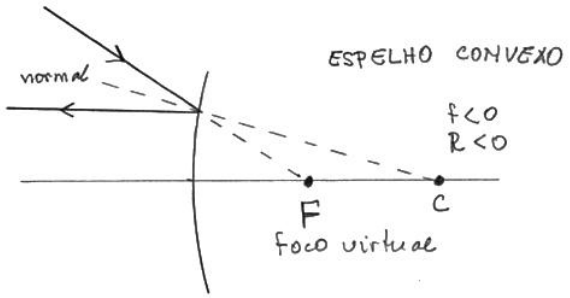




(2) Um raio que incide passando por F (ou sua continuação passa por F) é refletido paralelamente ao eixo ótico.

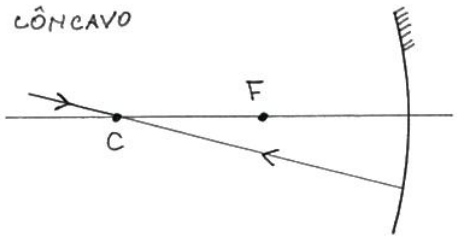
ESPELHO CÔNCAVO

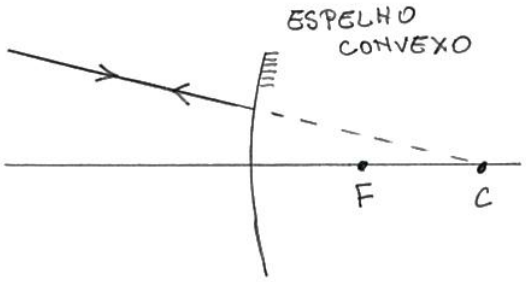




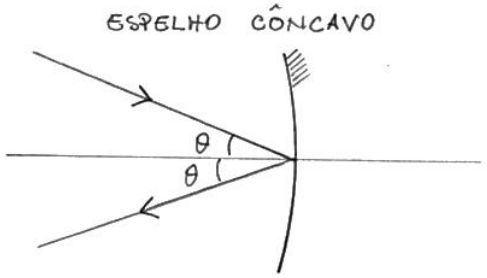
(3) Um raio que passa (ou seu prolongamento passa) pelo centro de curvatura é refletido sobre si mesmo.

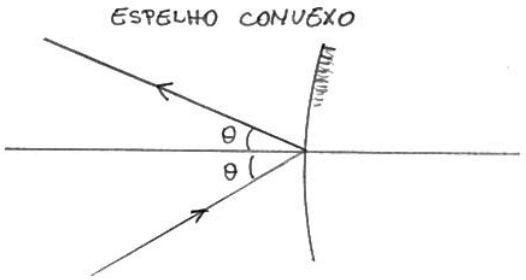
ESPELHO CÔNCAVO





(4) Um raio que incide no vértice é refletido simetricamente em relação ao eixo ótico.

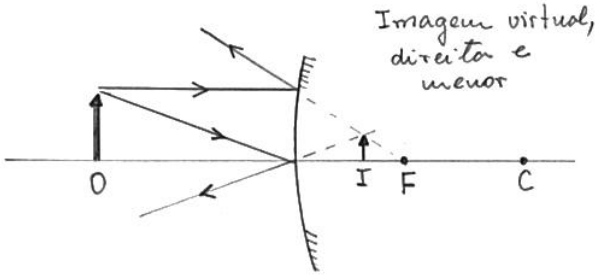




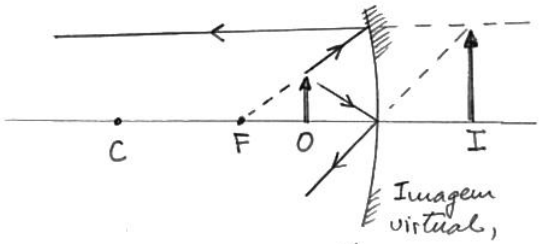
A imagem de um objeto pontual é formada na interseção dos raios principais. Normalmente basta traçar dois destes raios para localizar a imagem.

ALGUMAS IMAGENS

(1) Espelho convexo.



(2) Espelho côncavo: objeto entre o foco e o espelho.



direita e maior

(3) Espelho côncavo: objeto entre F e C.

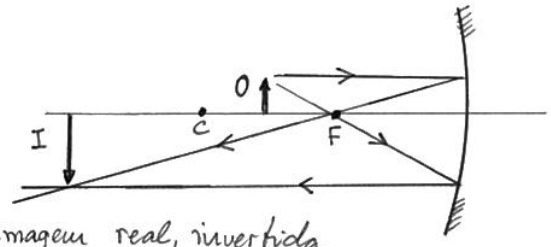
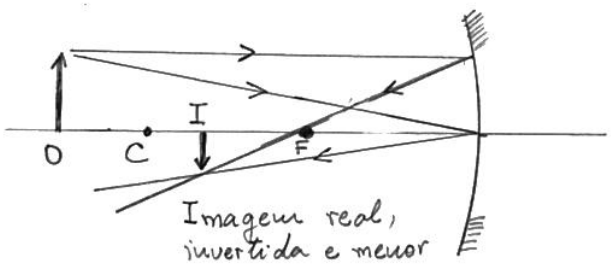
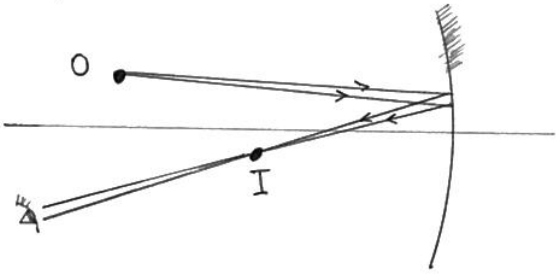


Imagem real, invertida e maior

(4) Espelho côncavo: objeto além do centro de curvatura



Obs: Os raios usados pelo olho para ver a imagem de um objeto nem sempre são raios principais.

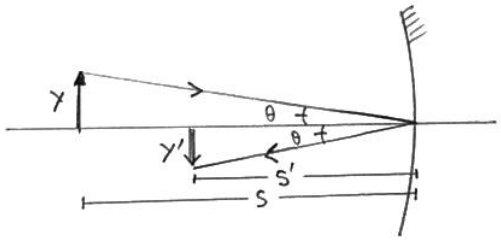


AMPLIAÇÃO TRANSVERSAL

Define-se a ampliação transversal como

$$m = \frac{y'}{y}$$

onde y e y' são as "alturas" do objeto e da imagem. Vamos obter a ampliação transversal para um espelho côncavo, mas o resultado obtido é válido também para espelhos convexos.



Pela semelhança de triângulos

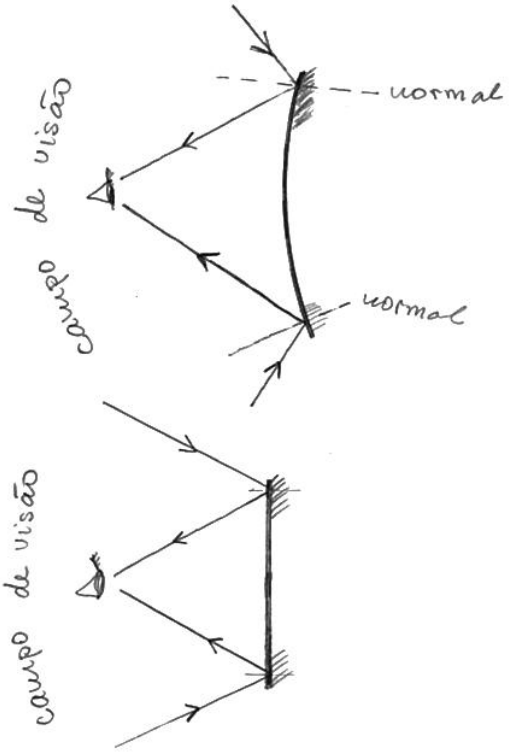
$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

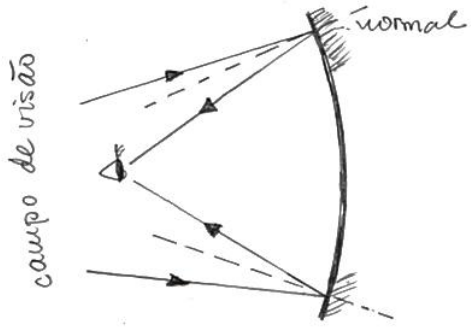
O sinal $-$ é necessário porque $s>0$, $s'>0$, $y>0$ e $y'<0$.

Quando $s'>0$ temos imagem real e quando $s'<0$ a imagem é virtual. Então imagem real é invertida ($m<0$) e imagem virtual é direita ($m>0$).

CAMPO DE VISÃO

Espelhos convexos são usados para aumentar o campo de visão do observador. Espelhos côncavos, ao contrário, proporcionam um campo de visão menor que o espelho plano. Veja as figuras.

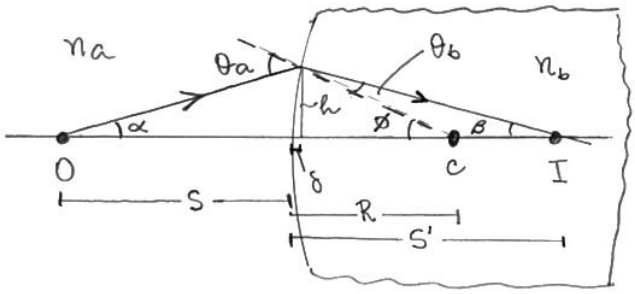




SUPERFÍCIES REFRATORAS ESFÉRICAS

Vamos agora estudar a formação de imagens por uma superfície esférica que separa dois meios com índices de refração diferentes. Considere, por exemplo, uma superfície convexa com $n_b > n_a$.

Os raios provenientes de O passam todos (aproximadamente) por I, desde que α seja pequeno. Portanto I é a imagem de O. A prova é dada abaixo.



Da lei da refração

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$$

se α for pequeno, θ_a e θ_b também o são, e

$$\operatorname{sen}\theta_a \sim \theta_a \qquad \operatorname{sen}\theta_b \sim \theta_b.$$

Assim

$$n_a\theta_a \simeq n_b\theta_b \Rightarrow \theta_b \simeq \frac{n_a}{n_b}\theta_a \quad (4)$$

Do teorema da pag. 3,

$$\theta_a = \alpha + \phi \quad (5)$$

$$\phi = \theta_b + \beta \quad (6)$$

Substituindo (4) em (6), temos

$$\phi = \frac{n_a}{n_b}\theta_a + \beta \quad (7)$$

Substituindo (5) em (7),

$$\phi = \frac{n_a}{n_b}(\alpha+\phi) + \beta$$

que pode ser reescrita como

$$n_a\alpha + n_b\beta = (n_b - n_a)\phi \quad (8)$$

Da figura, temos

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{s+\delta} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{h}{s'-\delta}$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{h}{R-\delta}$$

Como os ângulos são pequenos e δ é desprezível,

$$\alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha \simeq \frac{h}{s}$$

$$\beta \simeq \operatorname{tg}\beta \simeq \frac{h}{s'}$$

$$\phi \simeq \operatorname{tg}\phi \simeq \frac{h}{R}$$

Substituindo estes resultados em (8), temos

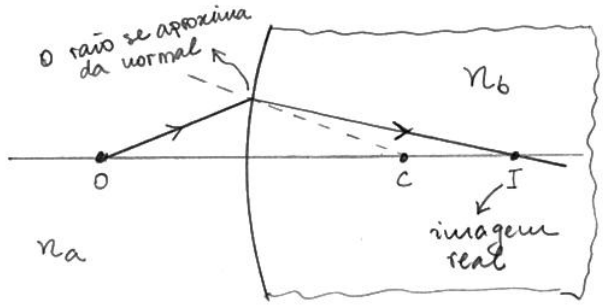
$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{R} \quad (9)$$

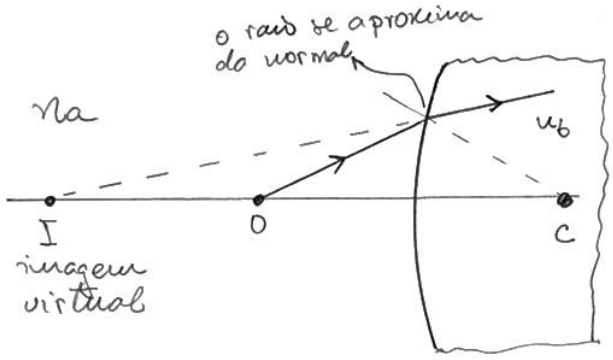
Esta relação não depende de α, mostrando que todos os raios provenientes de O passam (aproximadamente) por I. Ela nos permite calcular a posição da imagem se conhecermos a posição do objeto. Apesar de ter sido deduzida

para uma superfície convexa com $n_b > n_a$, a eq. (9) é válida em geral, desde que se use a convenção de sinais da pag 1.

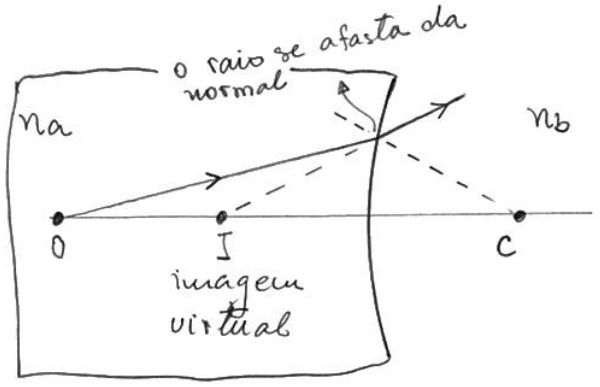
OBTENÇÃO DE IMAGENS PONTUAIS GRAFICAMENTE

1) Superfície convexa; $n_b > n_a$





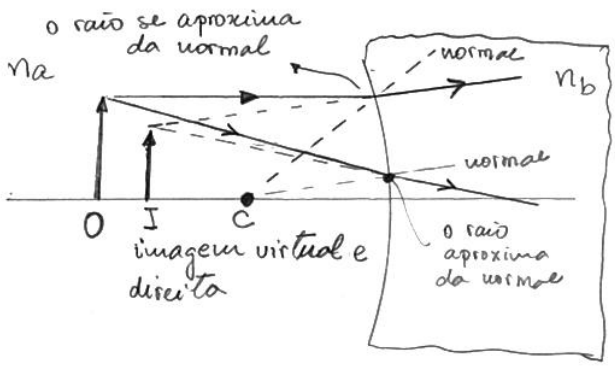
2) Superfície convexa; $n_b < n_a$



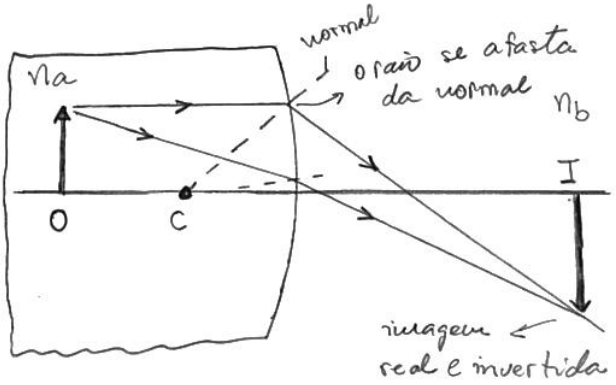
Obtenha as imagens de um objeto pontual para uma superfície côncava.

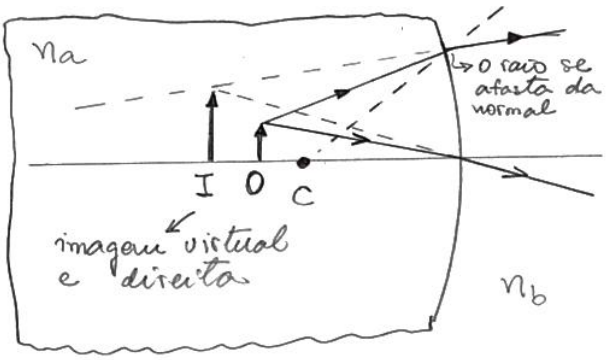
IMAGENS DE UM OBJETO EXTENSO

1) Superfície côncava; $n_b > n_a$



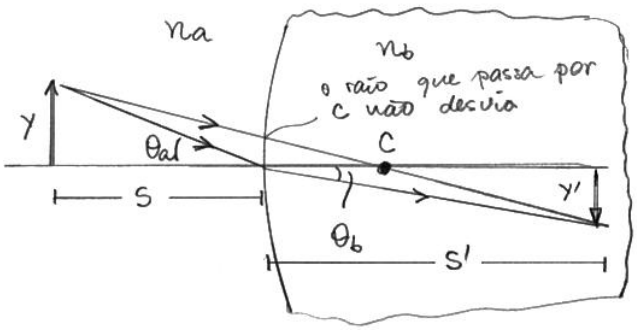
2) Superfície côncava; $n_b < n_a$





Obtenha as imagens da seta para uma superfície convexa.

AMPLIAÇÃO TRANSVERSAL



Da figura

$$tg\,\theta_a = \frac{y}{s} \qquad tg\,\theta_b = -\frac{y'}{s'}$$

y' é negativo

Da lei da refração

$$n_a \operatorname{sen}\theta_a = n_b \operatorname{sen}\theta_b$$

Para ângulos pequenos, $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$ de forma que

$$n_a \theta_a \simeq n_b \theta_b$$

Por outro lado,

$$\theta_a \simeq tg\,\theta_a = \frac{y}{s}$$

$$\theta_b \simeq tg\,\theta_b = -\frac{y'}{s'}$$ (y' é negativo)

Das 3 últimas equações

$$n_a \frac{y}{s} = -n_b \frac{y'}{s'}$$

Assim, a ampliação transversal é dada por

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_a s'}{n_b s} \qquad (10)$$

Esta equação vale para superfícies esféricas côncavas e convexas, para $n_a > n_b$ e $n_b > n_a$.

No caso especial de uma superfície refratora plana temos $R = \infty$, de forma que

$$\frac{n_a}{s} + \frac{n_b}{s'} = \frac{n_b - n_a}{\infty}$$

$$\Rightarrow \quad s' = -\frac{n_b}{n_a} s$$

sendo assim,

$$m = +1.$$

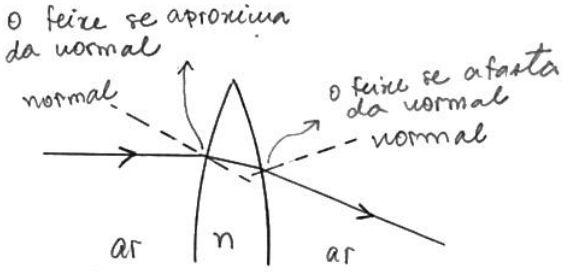
A imagem é direita e do tamanho do objeto.

LENTES

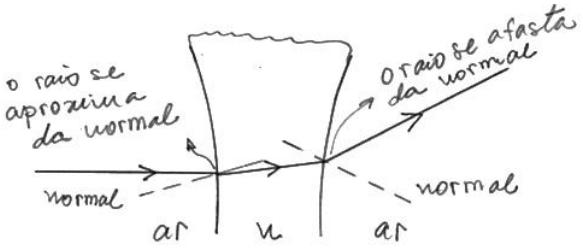
Lente é um objeto transparente, com duas superfícies refratoras.

1) Lente convergente (positiva): Os raios incidentes paralelos ao eixo da lente convergem para o eixo.

Ex: lente biconvexa

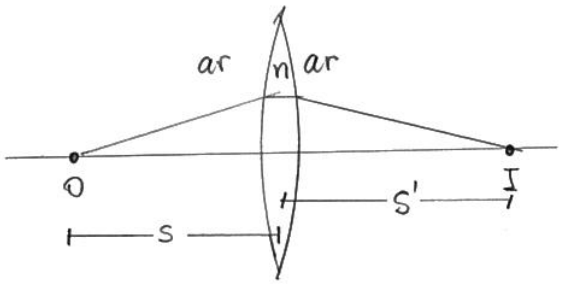


(2) Lente divergente (negativa): Os raios incidentes paralelos ao eixo da lente emergem divergindo dele.

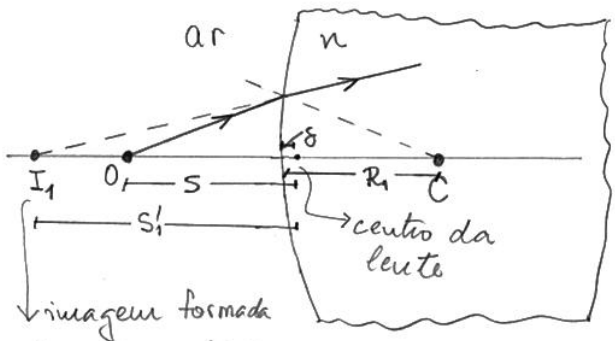


FÓRMULA PARA LOCALIZAR A POSIÇÃO DA IMAGEM

Vamos tomar como base uma lente biconvexa mas o resultado é válido em geral.



Considere inicialmente a imagem formada na primeira superfície refratora que servirá como objeto para a segunda superfície.



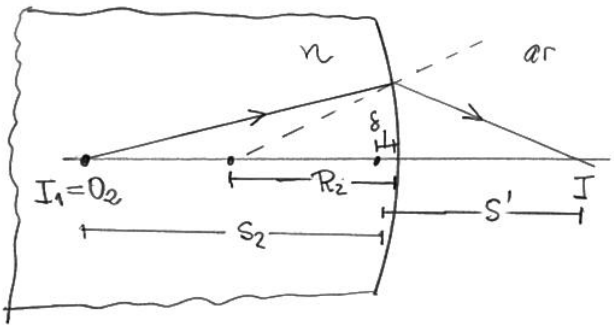
S e S' são medidos em relação ao centro da lente

Da Eq. (9), da pag 8,

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s_1'} = \frac{n-1}{R_1}$$

onde estamos desprezando δ (a distância entre a superfície e o centro da lente). Veja na figura que $S_1' < 0$.

Consideremos agora a refração na segunda superfície.



Devemos considerar que

$$S_2 = -S_1'$$

$\hookrightarrow S_1 < 0$ e $S_2 > 0$

Assim, da Eq. (9),

$$\frac{n}{-S_1} + \frac{1}{S'} = \frac{1-n}{R_2}$$

Somando as duas últimas equações, temos

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{S'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Definindo a distância focal através da equação

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \qquad (11)$$

que é conhecida como equação do fabricante de lente,

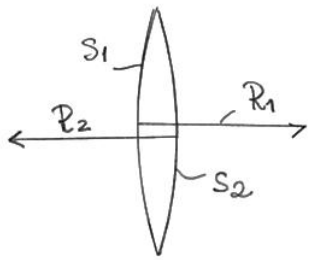
podemos escrever

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \qquad (12)$$

Note que esta é a mesma equação obtida para espelhos esféricos.

SINAL DE f.

(1) Lente biconvexa.



Supondo que o raio incide da esquerda para a direita,

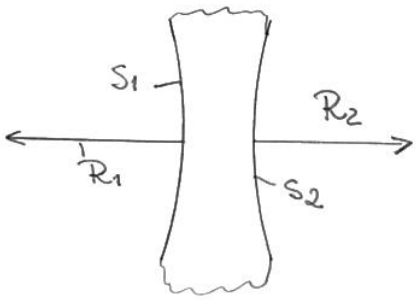
$R_1 > 0$ e $R_2 < 0$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

positivo, positivo, negativo

Logo, $f > 0$.

2) Lente bicôncava



Agora $R_1 < 0$ e $R_2 > 0$.

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

positivo, negativo, positivo

Logo, $f < 0$.

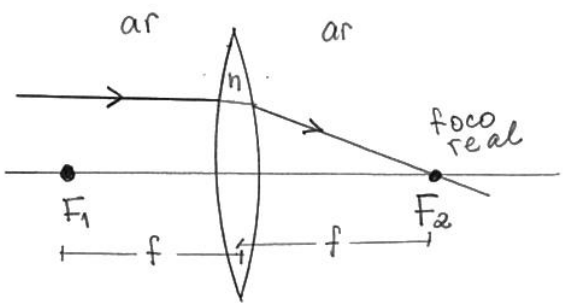
Outros casos são explorados no problema 35.23.

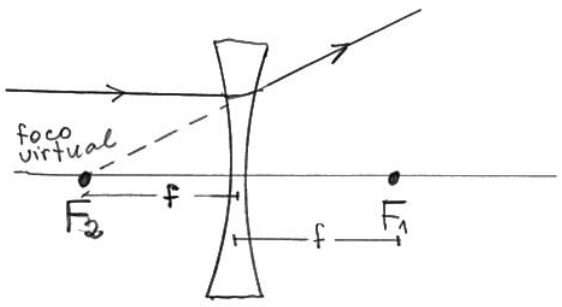
RAIOS PRINCIPAIS

(1) Se $s = \infty$,

$$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow s' = f.$$

Um raio que incide paralelamente ao eixo ótico (objeto no infinito) converge passando pelo foco F_2.



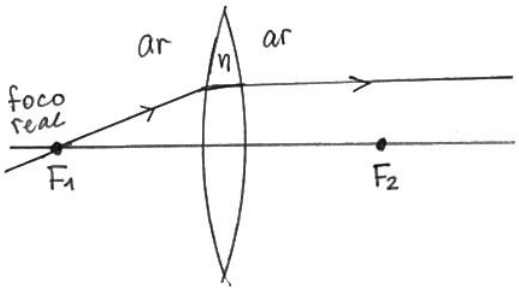


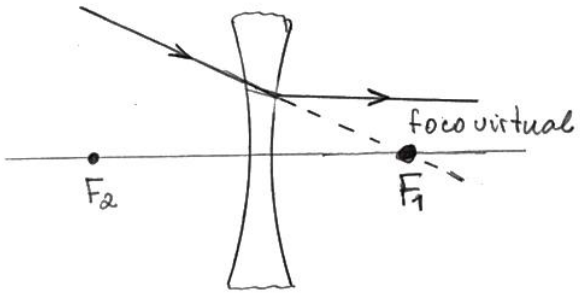
No caso de uma lente divergente é o prolongamento do raio refratado que passa por F_2.

(2) Se $s = f$

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow s' = \infty$$

Um raio que incide passando pelo foco F_1 (ou seu prolongamento passa por F_1) emerge paralelamente ao eixo ótico (imagem no infinito)

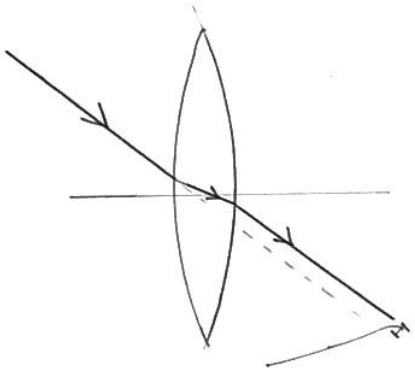




F_1 é o 1º foco: é por onde passa o raio incidente (ou seu prolongamento).

F_2 é o 2º foco: é por onde passa o raio refratado (ou seu prolongamento).

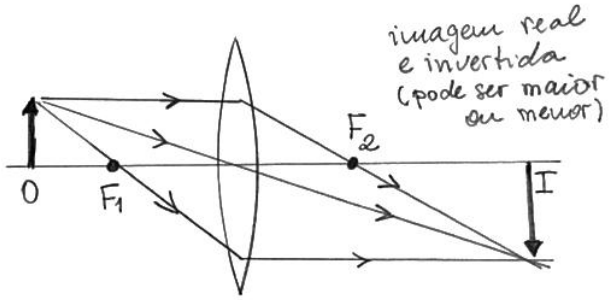
3) No caso de uma lente delgada, o raio que incide passando pelo centro da lente sofre um desvio desprezível e emerge paralelo à sua direção inicial.



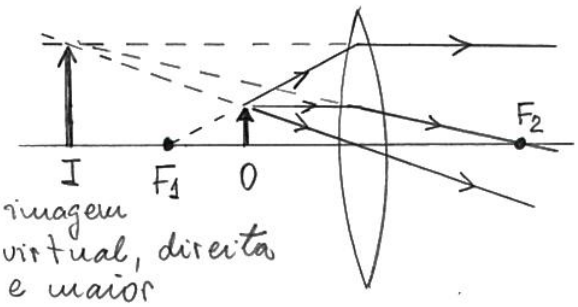
o desvio é proporcional à largura da lente e se ela for desprezível o desvio será desprezível.

ALGUMAS IMAGENS

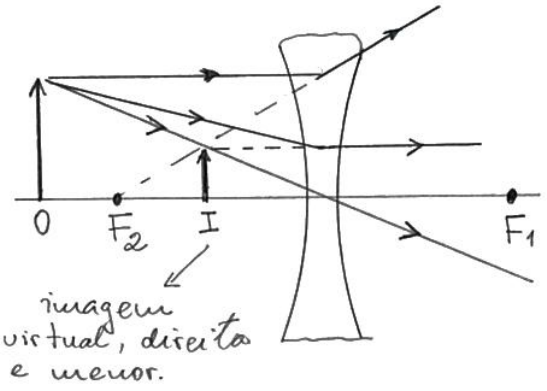
(1) Lente convergente; objeto além do foco



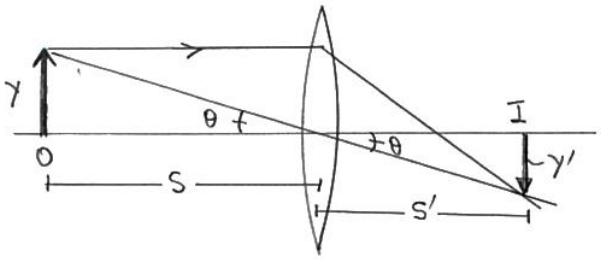
(2) Lente convergente; objeto entre o foco e a lente.



(3) Lente divergente; neste caso, as características da imagem não dependem do objeto estar além do foco ou entre o foco e a lente.



AMPLIAÇÃO LATERAL



Pela semelhança dos triângulos,

$$\frac{y}{s} = -\frac{y'}{s'}$$

↳ y' é negativo

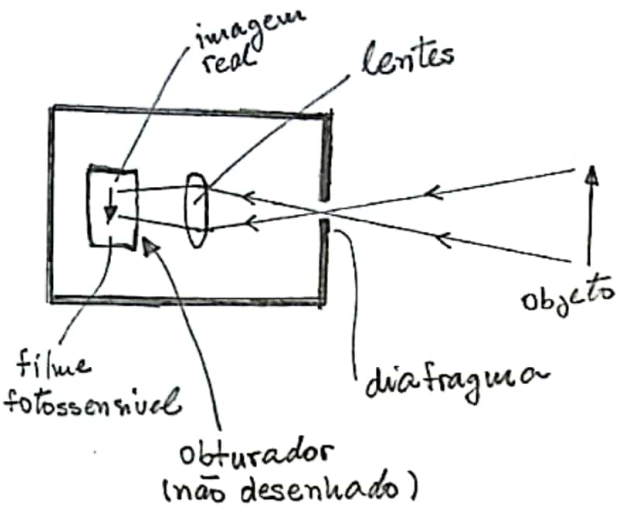
Assim

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

que é a mesma fórmula obtida para espelhos.

5. INSTRUMENTOS DE ÓTICA

CÂMERAS



Dizer que a máquina fotográfica está focalizada significa que o filme está na posição da imagem.

Da sec. 35.7, e da eq.

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f},$$

pode-se ver que quanto mais distante o objeto estiver da lente, mais próximo estará a imagem. Para uma lente com f fixo, quanto maior s, menor será s'. A lente deve ser móvel para que a sua distância até o filme possa ser ajustada, projetando sempre a imagem no filme.

DISTÂNCIA FOCAL E ÂNGULO DE VISÃO

A distância focal também pode ser ajustada para dar o ângulo de visão desejado. Da eq. anterior, considerando que em geral $s \gg f$, podemos ver que $s' \simeq f$. Assim a ampliação transversal é dada por

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \simeq -\frac{f}{s}$$

↳ a imagem é invertida

Veja que quanto maior f, maior a ampliação (menor a redução porque $m \ll 1$).

Considere que $y = y_f$ seja a dimensão lateral da área que vai ser projetada no filme (que vai ser fotografada) e $y' = y'_f$ a dimensão do filme. Olhando para a eq. acima, em módulo, temos

$$\frac{y'_f}{y_f} \simeq \frac{f}{s} \quad \Rightarrow y_f \simeq \frac{s\, y'_f}{f}$$

Então, quanto menor o foco, maior a área que será fotografada. Isto quer dizer que cada detalhe da foto aparecerá menor.

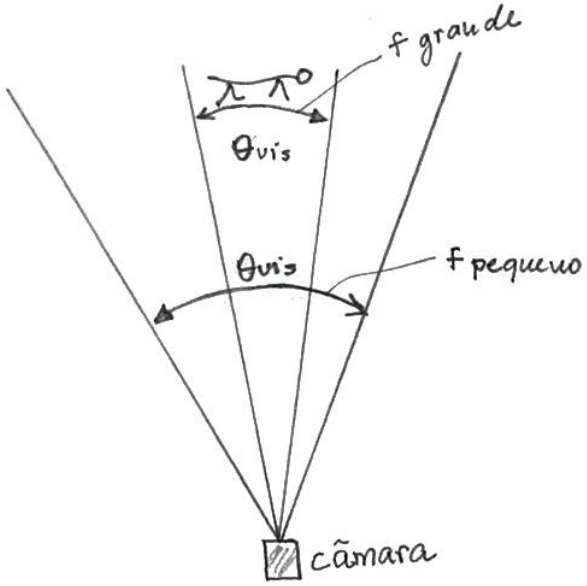
O ângulo de visão é dado por

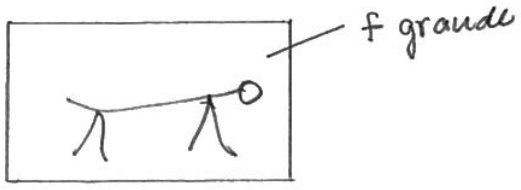
$$\theta_{vis} \simeq \frac{y_f}{s} \simeq \frac{y'_f}{f}$$

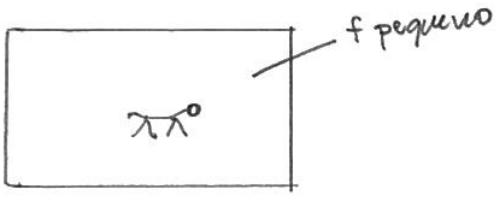
Como y'_f é fixo (é o tamanho do filme), quanto maior f menor é o ângulo de visão,

Digitalizado com CamScanner

e também a área fotografada.

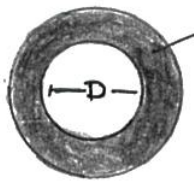






EXPOSIÇÃO

A quantidade de luz que atinge o filme é denominada exposição. Ela é controlada por dois fatores: o tempo que o obturador fica aberto (tempo de exposição) e a abertura do diafragma.



Diafragma com abertura variável.

D = diâmetro da abertura

A intensidade da luz que chega ao filme obedece às relações de proporcionalidade:

$$I \propto \text{área vista} \propto \gamma_f^2 \propto \frac{1}{f^2}$$

$$I \propto D^2$$

Portanto,

$$I \propto \left(\frac{D}{f}\right)^2$$

A exposição obedece à relação de proporcionalidade

$$\text{Exposição} \propto t \left(\frac{D}{f}\right)^2$$

onde t é o tempo de exposição (controlado pelo obturador).

Define-se o número f da lente como

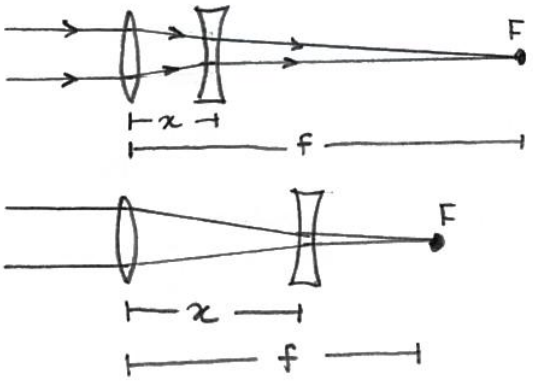
$$\text{número } f = \frac{f}{D}$$

Assim

$$\text{Exposição} \propto \frac{t}{(\text{número } f)^2}$$

LENTE ZOOM

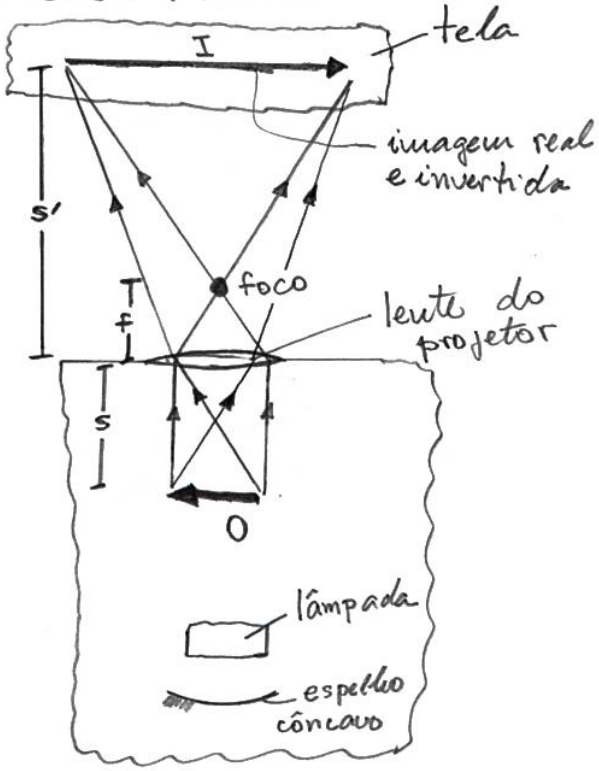
É uma lente onde f pode variar continuamente. Na fig. abaixo, ajustando-se a distância entre as lentes, x, pode-se ajustar f.



Em geral, as máquinas fotográficas ajustam f e D simultaneamente para manter o número f fixo, de forma que o tempo de exposição também não varie.

Em câmeras digitais usa-se um detector eletrônico no lugar do filme. A luz detectada é transformada em sinal elétrico.

PROJETORES



No projetor, em geral $s' >> s$, de forma que $y' >> y$. (a imagem é muito maior do que o objeto). Assim, $s \simeq f$.

EX 36.2.
Área do slide: $A_s = 24\,mm \times 36\,mm$
Área projetada: $A_p = 1,2\,m \times 1,8\,m$
$s' = 5,0\,m$. Calcular f.

Sol.
A ampliação é (em módulo)

$$m = \frac{1,2\,m}{24\,mm} = \frac{1,8\,m}{36\,mm} = 50$$

$$m = \frac{s'}{s} \Rightarrow s = \frac{s'}{m}$$

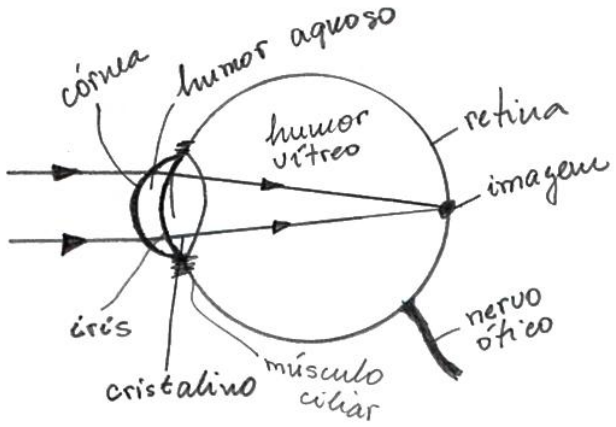
$$s = \frac{5,0\,m}{50} = 0,10\,m = 10\,cm$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0,10\,m} + \frac{1}{5,0\,m}$$

$$f = 0,098\,m = 9,8\,cm$$

Note que como $s' >> s$, $f \simeq s$.

OLHO



* Humor vítreo e humor aquoso:

$n \simeq 1,336$ → próximo ao da água

* Cristalino: $n \simeq 1,437$

A maior parte da refração ocorre na córnea.

A imagem real se forma na retina em um olho normal.

A retina contém células (bastonetes e cones) que captam a luz e tranformam em impulsos que são trausmitidos ao cérebro através do nervo ótico.

ÍRIS.
Contém uma abertura com diâmetro variável, denominada pupila, que controla a entrada de luz.

ACOMODAÇÃO

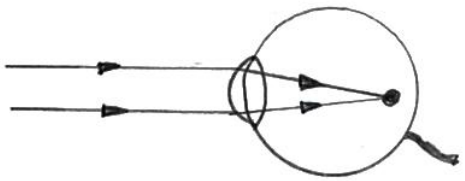
Quando o músculo ciliar está relaxado, um olho normal focaliza a imagem de um objeto situado no infinito na retina. Se o objeto estiver mais próximo, o músculo ciliar comprime o cristalino, mudando a distâncicia focal, para localizar a imagem na retina. A ideia é que a distâncicia imagem, s', seja igual ao diâmetro do olho (~ 2,5 cm). Esse processo chama-se acomodação.

Há um intervalo na distâncicia objeto para que o olho consiga acomodar e localizar a imagem na retina. Os extremos desse intervalo são chamados ponto distante e ponto próximo. O ponto distante do olho normal é no infinito. A posição do ponto próximo depende da capacidade do músculo ciliar de reduzir o raio de curvatura do cristalino. Em geral ela aumenta com a idade da pessoa. Esse aumento na posição do ponto próximo é chamado presbiopia (vista cansada).

DEFEITOS DA VISÃO

MIOPIA

Os raios provenientes de um objeto no infinito são focalizados antes da retina. A maior distâncicia para a qual um objeto forma uma imagem na retina (ponto distante) não é infinita.

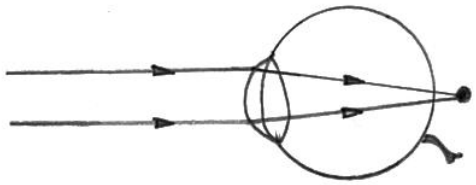


O olho míope produz uma convergência exagerada dos raios, produzindo uma imagem

antes da retina.

HIPERMETROPIA

Os raios provenientes de um objeto no infinito são focalizados depois da retina. O olho hipermétrope produz uma convergência insuficiente para os raios.



ASTIGMATISMO

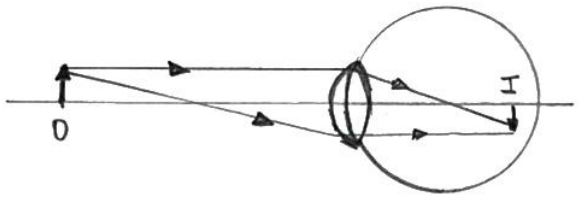
A superfície da córnea não é esférica. O raio de curvatura em um plano é maior que em outro. Por exemplo, a curvatura pode ser correta no plano horizontal mas incorreta no plano vertical.

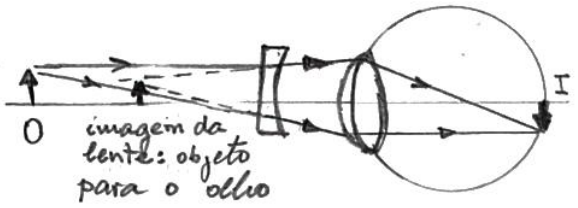
LENTES CORRETIVAS

Os defeitos do olho, mencionados acima, podem ser corrigidos por meio de lentes corretivas.

MIOPIA: LENTE DIVERGENTE

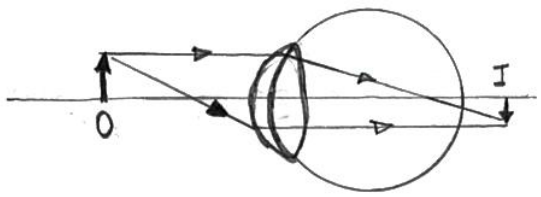
Uma lente divergente fornece a divergência necessária para o olho míope focalizar a imagem na retina. A imagem formada pela lente, que é o objeto para o olho, deve estar sobre o ponto distante ou mais próxima. É como se a lente trouxesse o objeto para mais perto

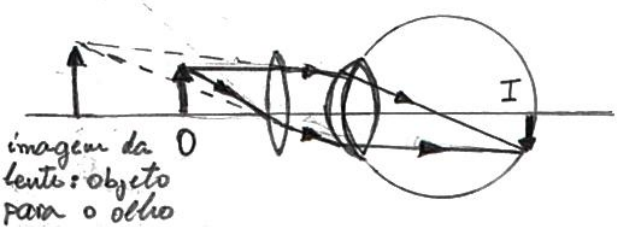




HIPERMETROPIA: LENTE CONVERGENTE

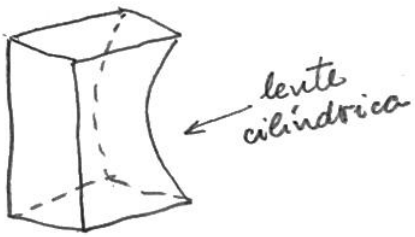
Uma lente convergente fornece a convergência necessária para o olho hipermétrope focalizar a imagem na retina. A imagem formada pela lente, que é o objeto para olho, deve estar sobre o ponto próximo ou além dele. É como se a lente levasse o objeto para mais longe.





ASTIGMATISMO: LENTE CILÍNDRICA

O astigmatismo pode ser corrigido por uma lente cilíndrica, que corrige a imagem em um plano onde a curvatura da córnea é incorreta e não corrige em outro, onde a curvatura da córnea é correta.



POTÊNCIA

Define-se a potência de uma lente como o inverso da distância focal em metro. A unidade de potência é a dioptria.

Exs:

1) $f = 33\,cm = 0,33\,m$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{0,33\,m}$$

convergente

potência $= +3,0$ dioptrias

2) $f = -50\,cm = -0,50\,m$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-0,50\,m}$$

divergente

potência $= -2,0$ dioptrias

A potência é o número que aparece em uma receita de óculos.

Se o defeito envolver simultaneamente astigmatismo e miopia ou hipermetropia a receita envolve 3 números: potência da lente esférica, potência da lente cilíndrica e um ângulo para dar a orientação da lente cilíndrica.

Ex. 36.3. Hipermetropia.

O ponto próximo é 100 cm. Determinar a potência da lente (convergente) para se ver um objeto a 25 cm.

Sol. Deseja-se que para $s = 25\,cm$ tenhamos $s' = -100\,cm$. O sinal $-$ é porque a imagem da lente é virtual.

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{0,25\,m} + \frac{1}{-1\,m}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{3}{m} \Rightarrow f = +0,33\,m$$

potência $= +3,0$ dioptrias

lente convergente

Ex. 36.4. Miopia.

O ponto distante é 50cm. Determine a potência da lente para ver um objeto no infinito supondo a lente a 2cm do olho.

Sol. Deseja-se que $s' = -48cm$ quando $s = \infty$. Note que o objeto estando a 48cm da lente estaria a 50cm do olho.

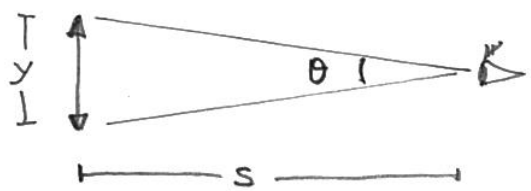
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{-0,48m}$$

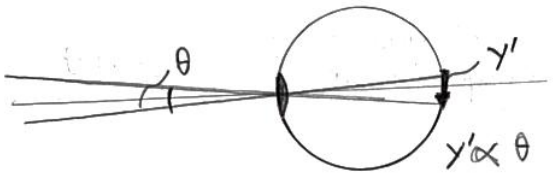
$$f = -0,48m = -48cm$$

potência $= -2,1$ dioptria.

LUPA

O tamanho aparente de um objeto é determinado pelo tamanho da imagem na retina, que é determinado pelo ângulo θ subentendido pelo objeto no olho (tamanho angular)



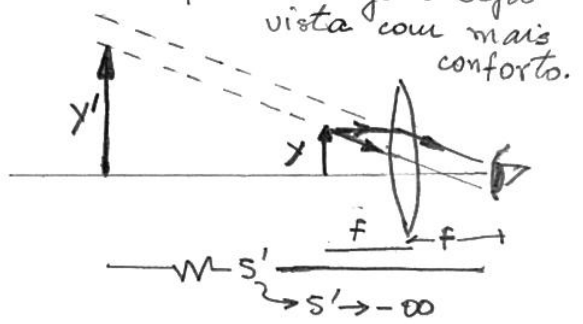


$$\theta \simeq \frac{y}{s}$$

Quanto menor s, maior θ. Mas s não pode ser diminuido além do ponto próximo, s_{min}. Assim

$$\theta_{max} \simeq \frac{y}{s_{min}}$$

Pode-se aumentar θ além desse valor usando-se uma lente convergente, que nesse caso é chamada lupa ou lente de aumento. O objeto é colocado no foco, tal que a sua imagem esteja no infinito, para que a imagem seja vista com mais conforto.



O aumento no tamanho aparente do objeto é caracterizado pela ampliação angular, definida como

$$M = \frac{\theta'}{\theta} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{com a lente} \\ \rightarrow \text{sem a lente} \end{matrix}$$

Na figura,

$$\theta \simeq \frac{y}{s_{min}} \qquad \theta' \simeq \frac{y}{f}$$

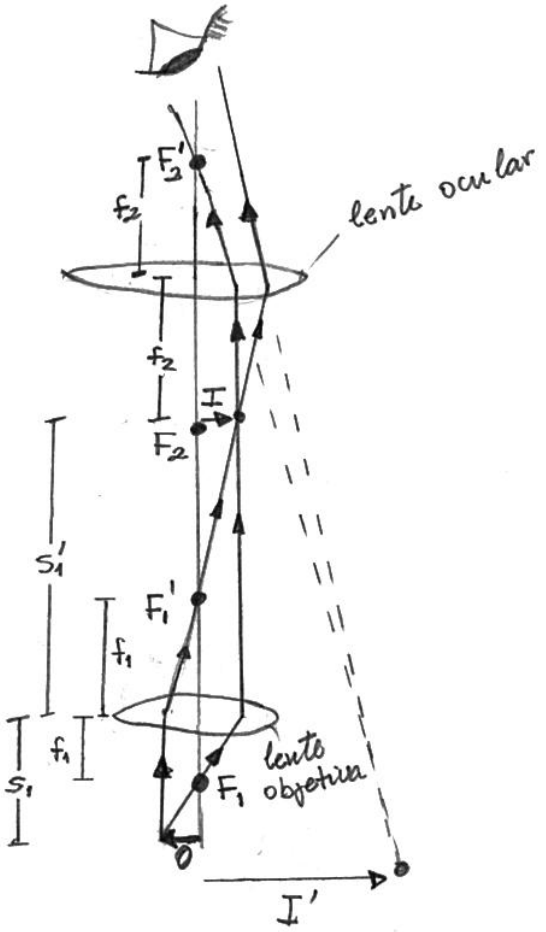
Assim

$$M \simeq \frac{s_{min}}{f}$$

Para um olho normal, $s_{min} \simeq 25\,cm$.

Da eq. acima pode-se ver que quanto menor f maior a ampliação. No entanto há um limitador. Uma lente convergente com f muito pequeno teria uma espessura central muito grande, o que acarretaria em distorções na imagem. Na prática, o aumento através de uma lupa simples se limita a 3 ou 4 vezes.

MICROSCÓPIO



O objeto é colocado um pouco além do foco F_1 da lente objetiva. A imagem formada, I, será real e maior que o objeto. Esta imagem deve ser formada entre o foco e o vértice da lente ocular, quase sobre o foco. A lente ocular funciona como uma lupa simples, com a imagem I funcionando como seu objeto.

A ampliação angular é dada por

$$M = m_1 M_2$$

sendo m_1 a ampliação transversal da objetiva e M_2 a ampliação angular da ocular.

O primeiro fator é

$$m_1 = -\frac{s_1'}{s_1}$$

Em geral coloca-se o objeto próximo do foco. Assim $s_1 \simeq f_1$ e $s_1' \gg s_1$. Portanto

$$m_1 \simeq -\frac{s_1'}{f_1}$$

Por sua vez

$$M_2 \simeq \frac{s_{min}}{f_2} \longrightarrow \text{como na lupa}$$

onde, tipicamente, $s_{min} \simeq 25\,cm$.

Reunindo os resultados, obtemos

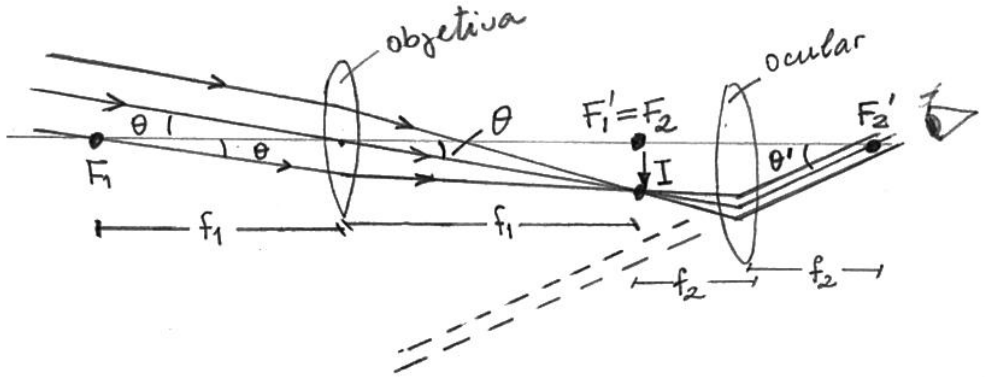
$$M \simeq \frac{s_{min}\, s_1'}{f_1 f_2}$$

Como é costume, suprimimos o sinal −

Note que para ter uma grande ampliação deve-se ter f_1 e f_2 pequenos.

Para se tirar uma fotografia usando um microscópio, a lente ocular é removida e uma câmera é acoplada de forma que a imagem I se forme no filme.

TELESCÓPIO



I é a imagem real, formada pela lente objetiva, que serve de objeto para a lente ocular. Como o objeto está muito distante, a imagem I é formada sobre o foco F_1' da objetiva.

Para que a imagem final também seja formada no infinito, I deve estar sobre o foco F_2 da ocular. Dessa forma a distância entre as lentes deve ser ajustada para ser igual a $f_1 + f_2$.

O objeto não é mostrado porque está no infinito mas subentende um ângulo θ na objetiva. Este também seria o ângulo se ele fosse observado a olho nú. Da figura, se y' for o tamanho da imagem I, então

$$\theta = -\frac{y'}{f_1} \qquad \theta' \simeq \frac{y'}{f_2}$$

A ampliação angular é

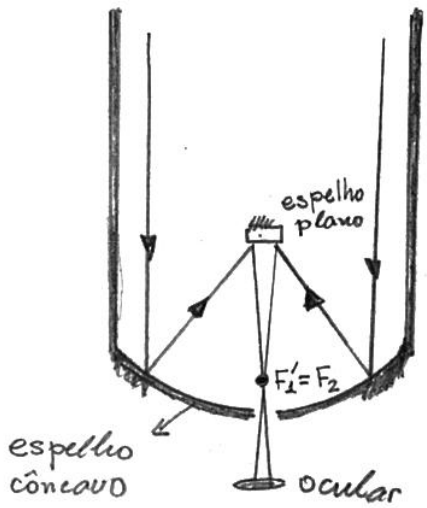
$$M = \frac{\theta'}{\theta} \simeq -\frac{f_1}{f_2}$$

Como y' é negativo, θ é positivo. θ' é negativo, como mostra a figura. M negativo indica que a imagem final é invertida.

No telescópio deve-se ter f_1 grande e f_2 pequeno para se ter uma grande ampliação.

Num telescópio refletor a lente objetiva é substituída por um espelho côncavo. O espelho não apresenta os problemas de aberrações cromática e esférica que grandes lentes apresentam.

xial é válida. Se a lente for grande ou muito curva essa aproximação deixa de valer.



Como um microscópio, quando um telescópio é usado para fotografar, a lente ocular é substituída por um filme ou por um dispositivo eletrônico.

ABERRAÇÕES

1) Cromática.

O índice de refração depende do comprimento de onda. Portanto, a distância focal também depende. Assim, uma estrela pode aparecer espalhada no telescópio. Cada cor da luz branca que vem da estrela é focada em um ponto ligeiramente diferente.

2) Esférica.

Estamos sempre supondo que a aproximação para-

6. INTERFERÊNCIA

Muitos fenômenos óticos não podem ser explicados com base na ótica geométrica. Por exemplo, para entender o surgimento de franjas coloridas em uma bolha de sabão é necessário olhar para o caráter ondulatório da luz. As cores vivas na bolha surgem por causa de um fenômeno ondulatório chamado interferência, que vamos estudar neste capítulo.

Nos efeitos de interferência (combinação ou superposição de ondas) que vamos estudar vamos supor:

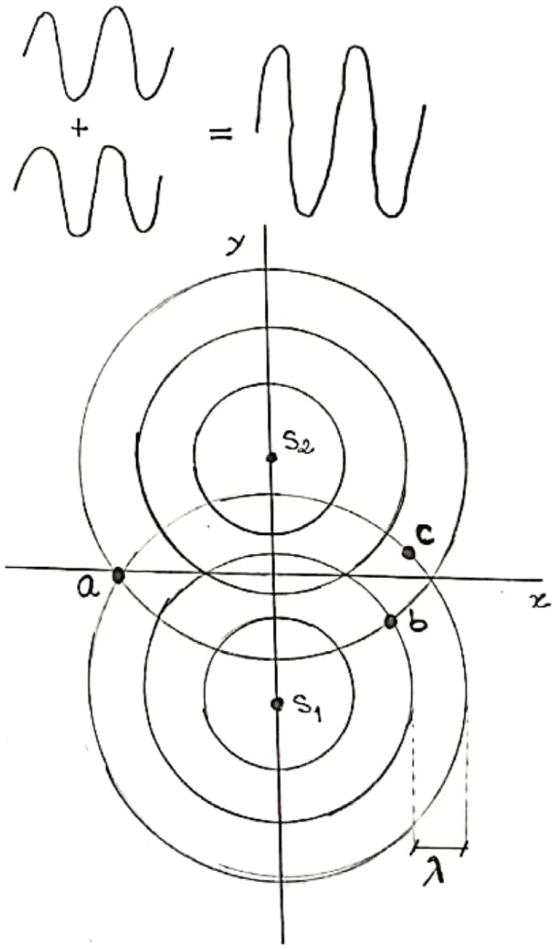
(1) que as ondas que interferem possuem a mesma freqüência e o mesmo comprimento de onda;

(2) que as fontes de luz sejam coerentes, ou seja, que a diferença de fase entre as ondas que interferem seja constante;

(3) que as ondas que interferem possuem a mesma polarização, ou seja, que os campos elétricos das ondas apontam na mesma direção.

INTERFERÊNCIAS CONSTRUTIVA E DESTRUTIVA

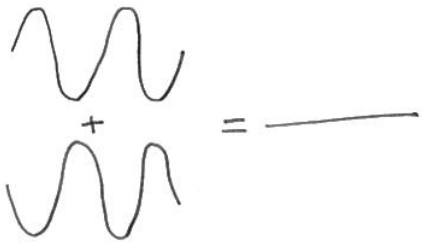
Suponha que as fontes S_1 e S_2 da figura emitam ondas com a mesma frequência, mesma polarização e mesma fase. O ponto a está à mesma distância das duas fontes, de forma que as duas ondas atingem este ponto em fase. Os campos elétricos (e magnéticos) das duas ondas se somam produzindo um efeito chamado "interferência construtiva".



O ponto b está a uma distância 2λ de S_1 e a uma distância 3λ de S_2. Como a diferença de caminho é de 1 comprimento de onda, as ondas se somam, e novamente ocorre interferência

Digitalizado com CamScanner

construtiva. O ponto c está a 3λ de S_1 e $2{,}5\lambda$ de S_2. Portanto as ondas chegam a este ponto defasadas de meio comprimento de onda. Ocorre interferência destrutiva, ou seja, o cancelamento total (se as amplitudes forem iguais) ou parcial das ondas:



Em geral há interferência construtiva se a diferença de caminho entre as duas ondas for dada por

$$r_2 - r_1 = m\lambda$$

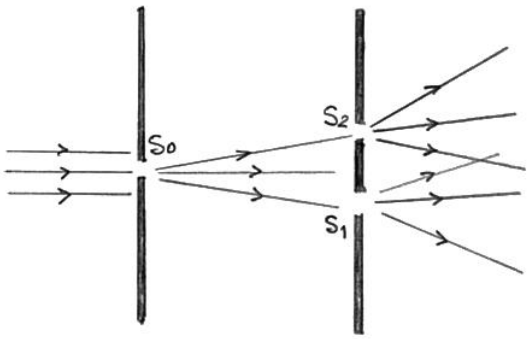
$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Há interferência destrutiva se

$$r_2 - r_1 = (m + \tfrac{1}{2})\lambda$$

PRODUÇÃO DE ONDAS COERENTES

Nas fontes comuns de luz os átomos emitem independentemente, por isto fontes diferentes não produzem ondas coerentes. Uma forma de produzir dois feixes (secundários) coerentes é obtê-los a partir de um único feixe (primário). Assim qualquer variação de fase na fonte primária afeta igualmente os dois feixes secundários. Na figura abaixo as fendas S_1 e S_2 se comportam como fontes coerentes porque se originam da mesma fonte primária S_0.



Obs. Em um laser os átomos emitem de maneira sincronizada, de forma a produzir luz (muito aproximadamente) monocromática e coerente.

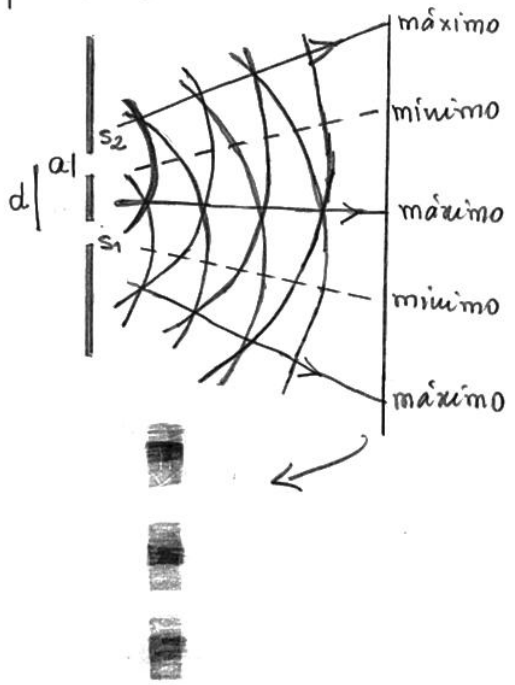
A EXPERIÊNCIA DE YOUNG

A primeira demonstração experimental de que a luz é uma onda foi feita por Thomas Young em 1801. Ele usou o esquema da fig acima para obter duas fontes coerentes S_1 e S_2. A onda resultante das ondas provenientes de S_1 e S_2 é projetada em uma tela onde surgem franjas claras (interferência construtiva) e escuras (interferência destrutiva).

A experiência mostra que a luz interfere, e portanto é uma onda.

No seu experimento original Young usou orifícios circulares em vez de fendas estreitas,

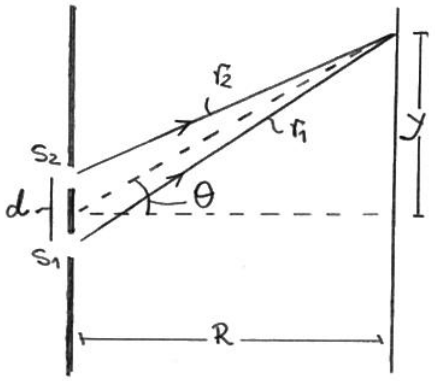
como estamos supondo para simplificar.



Aqui vamos supor que $a \ll d$ mas no capítulo seguinte vamos relaxar esta suposição.

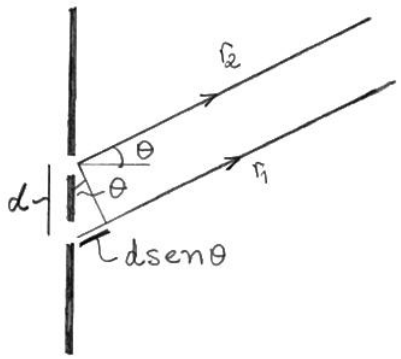
POSIÇÕES DOS MÁXIMOS E MÍNIMOS

Considere um ponto P na tela com posição definida pelo ângulo θ.



Em geral $R \gg d$, de forma que os raios 1 e 2 que chegam ao ponto P são praticamente paralelos. Assim, a diferença de caminho entre eles é

$$\Delta r = r_1 - r_2 = d \operatorname{sen}\theta \qquad (A)$$



P será um ponto claro (interferência construtiva) se

$$d \operatorname{sen}\theta = m\lambda \qquad (B)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ao contrário, P será um ponto escuro (interferência destrutiva) se

$$d \operatorname{sen}\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad (C)$$

A figura que se forma na tela é uma sucessão de faixas claras e escuras, chamadas franjas de interferência (fig acima e à esquerda).

A relação entre y e θ (figura ao lado) é

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R \operatorname{tg}\theta$$

Em geral $y \ll R$, de forma que $\theta \ll 1$, e

$$\operatorname{tg}\theta \simeq \operatorname{sen}\theta$$

Assim

$$y \simeq R \operatorname{sen}\theta$$

Usando a Eq. (B) para eliminar $\operatorname{sen}\theta$, podemos escrever

$$y_m = m\,\frac{R\lambda}{d}$$

onde o índice m em y quer dizer que se trata do m-ésimo máximo.

A distância entre dois máximos consecutivos é dada por

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{R\lambda}{d}$$

As posições dos mínimos são dadas por

$$y_m = \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\frac{R\lambda}{d}$$

Como a distância entre as franjas adjacentes é inversamente proporcional a d, se d for muito grande (~1cm ou mais) as franjas ficam muito próximas, de forma que não é possível separá-las (o efeitos de interferência não são perceptíveis).

No seu experimento, Young mediu d, R e Δy e calculou λ. Assim obteve, pela primeira vez, uma medida direta do comprimento de onda da luz.

INTENSIDADE NA EXPERIÊNCIA DE YOUNG.

Em seguida vamos obter uma expressão para a intensidade relativa da onda que chega ao ponto P em termos de θ (ou y). Vamos supor que as fendas sejam da mesma largura, de forma que os campos das duas ondas que interferem tenham a mesma amplitude. Na verdade a amplitude depende da distância às fendas, mas vamos supor que r_1 e r_2 variam pouco, de forma que esta dependência pode ser ignorada.

Inicialmente vamos supor que os campos possuem uma diferença de fase ϕ, de forma que podemos escrever:

$$E_1 = E\cos(\omega t + \phi)$$

$$E_2 = E\cos\omega t$$

A intensidade de cada onda individual é dada por (cap. 33)

$$I_1 = I_2 = S_{med} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E^2$$

Podemos obter a amplitude da onda resultante no ponto P, E_P, usando o diagrama de fasores da pag 6. Da lei dos cossenos,

$$E_P^2 = E^2 + E^2 - 2E^2\cos(\pi - \phi)$$

Como $\cos(\pi-\phi) = -\cos\phi$,

$$E_p^2 = 2E^2(1+\cos\phi)$$

Como $1+\cos\phi = 2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$,

$$E_p^2 = 4E^2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

ou $$E_p = 2E\left|\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right|$$

Casos especiais:

(1) $\phi = 0 \Rightarrow E_p = 2E$, o que corresponde a interferência construtiva.

(2) $\phi = \pi \Rightarrow E_p = 0$, o que corresponde a interferência destrutiva.

A intensidade da onda resultante é dada por

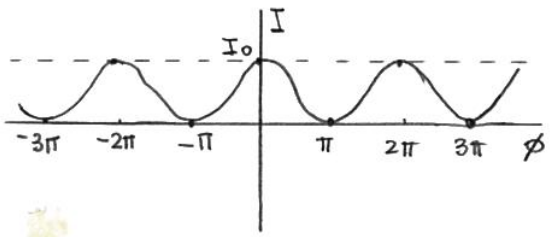
$$I = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_p^2 = 2\epsilon_0 c E^2\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

O máximo de I ocorre quando $\phi = 0$ (ou $\phi = m2\pi$) e é dado por

$$I_0 = 2\epsilon_0 c E^2 = 4I_1 = 4I_2$$

Em termos de I_0, podemos escrever

$$I = I_0\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \qquad (D)$$



Se tomarmos uma média de I sobre todas as diferenças de fase possíveis, obtemos

$$I_{med} = I_0\left[\cos^2(\phi/2)\right]_{med} = \frac{1}{2}I_0$$

$$= 2I_1 = I_1 + I_2$$

Este resultado mostra que a interferência não muda a energia total, apenas a redistribui sobre a tela.

Para expressar a intensidade em termos de θ vamos usar o fato de que a diferença de fase é proporcional à diferença de caminho. Assim

$$\left.\begin{array}{l}\phi \;—\; d\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2\pi \;—\; \lambda\end{array}\right\} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi d}{\lambda}\mathrm{sen}\,\theta$$

Substituindo este resultado em (D), obtemos

$$I = I_0\cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\mathrm{sen}\,\theta\right)$$

Note que os máximos de I (centros das franjas claras) ocorrem para

$$\frac{\pi d}{\lambda}\mathrm{sen}\,\theta = m\pi$$

$$\Rightarrow d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda$$

que é a Eq. (B).

Por sua vez, os mínimos (centros das franjas escuras) ocorrem para

$$\frac{\pi d}{\lambda}\,\text{sen}\,\theta = \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\pi$$

$$\Rightarrow d\,\text{sen}\,\theta = \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\lambda$$

que é a Eq. (C).

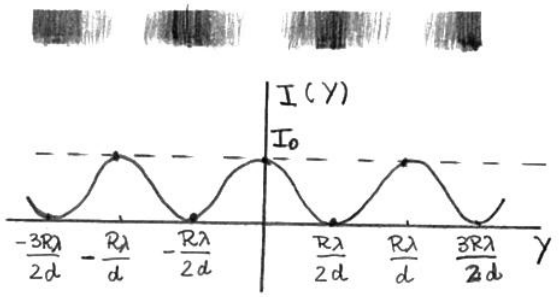
Nos casos em que $y \ll R$, podemos escrever

$$\text{sen}\,\theta \simeq \text{tg}\,\theta = \frac{y}{R}$$

de forma que I pode ser escrito em termos de y como

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d y}{\lambda R}\right)$$

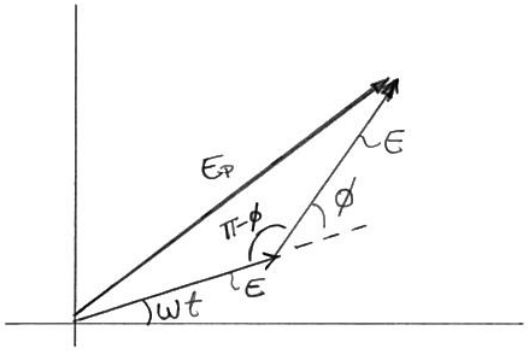
Os resultados obtidos aqui mostram que a passagem da região clara para a escura ocorre de maneira contínua, como mostra a figura abaixo.



Na prática, a franja central, correspondente a $\theta = 0$ ($y = 0$ e $\phi = 0$), é mais clara que as outras. À medida que se afastam do centro, as franjas vão ficando menos nítidas. Este fato será explicado no próximo capítulo quando levarmos em conta a largura finita da fenda.

——//——//——//——//——

Diagrama de fasores mencionado no final da pag. 4

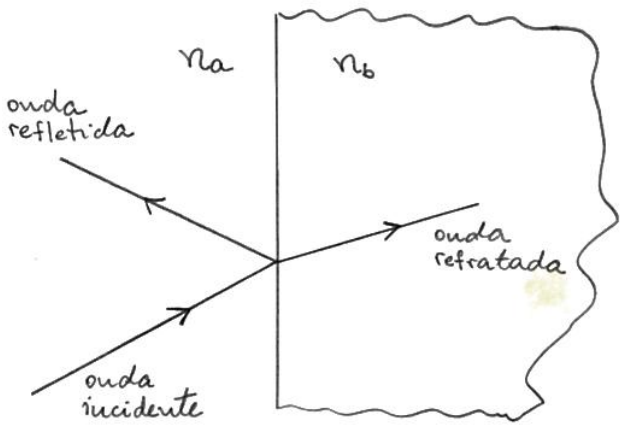


——//——//——//——//——

INTERFERÊNCIA EM PELÍCULAS FINAS

Os raios refletidos nas faces opostas de uma película fina podem interferir construtivamente ou destrutivamente, dependendo da diferença de fase entre eles.

Para calcular corretamente a diferença de fase é necessário verificar se a reflexão ocorre com a luz incidente vinda do meio com maior ou menor índice de refração.



Pode-se mostrar, a partir das Eqs. de Maxwell, que para incidência normal, as relações entre as amplitudes das ondas refletida e refratada e a amplitude da onda incidente são:

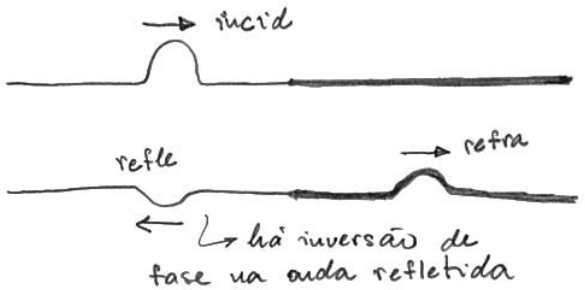
$$E_{refle} = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b} E_{incid}$$

$$E_{refra} = \frac{2n_a}{n_a + n_b} E_{incid}$$

Desta forma:

(1) se $n_b > n_a$, E_{refle} tem sinal contrário a E_{incid}. Portanto há uma mudança de fase de π rad, o que corresponde a meio comprimento de onda.

Uma analogia com uma onda propagando em uma corda associa n maior com uma corda mais densa



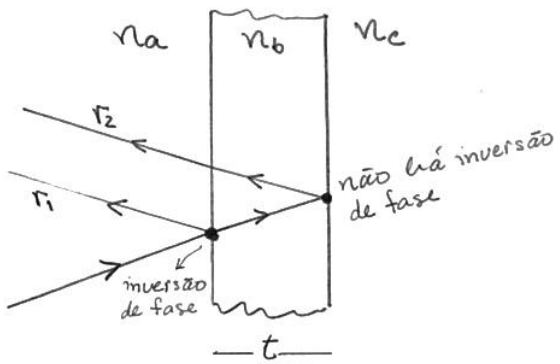
(2) Se $n_b < n_a$, E_{refle} tem o mesmo sinal de E_{incid}. Não há mudança de fase.



(3) Obviamente, se $n_a = n_b$, não $E_{refle} = 0$ e não haverá reflexão.

Vamos fazer a análise da interferência das ondas refletidas em uma película fina considerando dois casos:

(1) $n_b > n_a$ e $n_b > n_c$



Supondo incidência frontal, a diferença de caminho é $2t$. Há inversão de fase na 1º reflexão mas não na segunda. Então haverá interferência construtiva se

$$2t = (m + \tfrac{1}{2})\lambda_b$$

onde $m = 0, 1, 2, \cdots$

Esteja atento ao fato de que

$$\lambda_b = \lambda / n_b$$

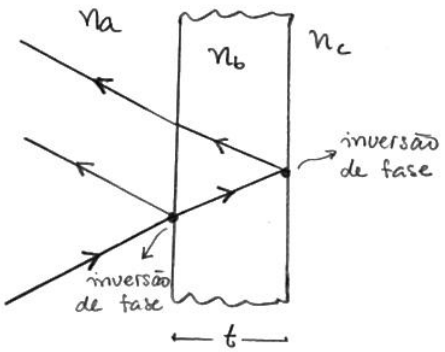
é o comprimento de onda no meio b (a película) enquanto λ é o comprimento de onda no vácuo.

Haverá interferência destrutiva se

$$2t = m\lambda_b$$

As expressões acima são aplicáveis sempre que houver mudança de fase apenas em uma das reflexões. Por exemplo, $n_b < n_a$ e $n_b < n_c$.

(2) $n_b > n_a$ e $n_b < n_c$.



Há inversão de fase nas duas reflexões. Logo haverá interferência construtiva se

$$2t = m\lambda_b$$

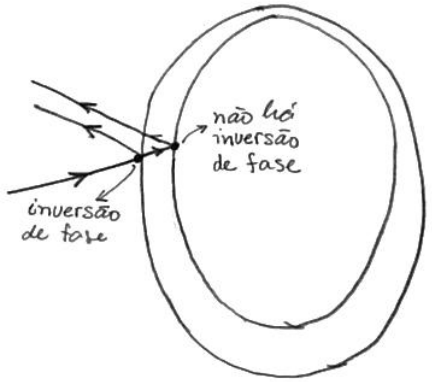
e interferência destrutiva se

$$2t = (m+\tfrac{1}{2})\lambda_b$$

Estas relações também são válidas se não houver inversão de fase em nenhuma das reflexões ($n_a > n_b$ e $n_b > n_c$).

A BOLHA DE SABÃO

Uma bolha de sabão se comporta como uma película de espessura variável. Por causa da força gravitacional, a bolha é mais fina em cima e mais grossa em baixo.



Quando iluminada com luz branca, a bolha reflete mais, em cada ponto, a cor cujo comprimento de onda satisfaz a relação

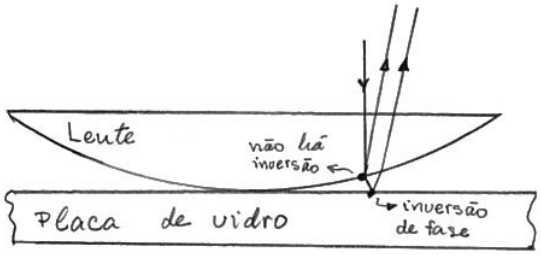
$$2t = (m+\tfrac{1}{2})\lambda_{bolha}$$

onde t é a espessura variável. As outras cores são refletidas em menor intensidade, de forma que em cada região a bolha parecerá iluminada com uma cor diferente.

A PELÍCULA DE ÓLEO

Uma película fina de óleo também possui espessura variável, de forma que em cada ponto haverá interferência construtiva para uma cor diferente, produzindo franjas coloridas.

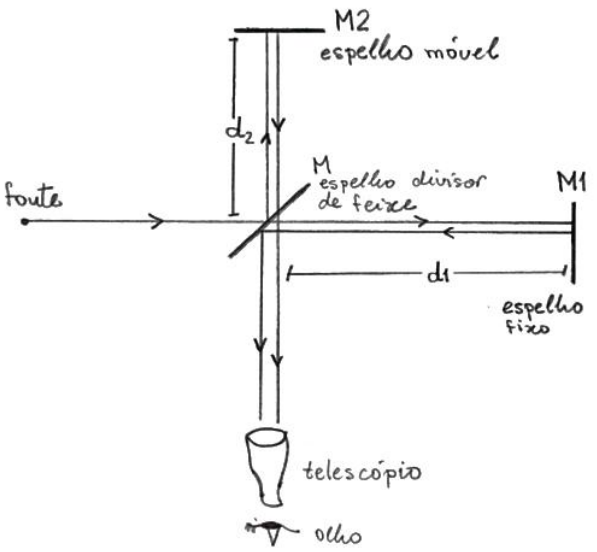
ANÉIS DE NEWTON



A camada de ar entre a lente e a placa de vidro funciona como uma película fina de espessura variável. Em cada ponto há interferência construtiva para uma cor diferente, formando anéis coloridos em torno do centro da lente.

Veja o exemplo 37.7 para entender porque os efeitos de interferência não são vistos em películas grossas ($t \gg \lambda$).

O INTERFERÔMETRO DE MICHELSON



O espelho M deixa passar ~50% da luz incidente e reflete a outra parte. Assim, funciona como um divisor de feixe. A diferença de caminho entre os dois feixes é $2d_2 - 2d_1$. Se

$$2(d_2 - d_1) = m\lambda$$

haverá interferência construtiva no telescópio. Por outro lado, se

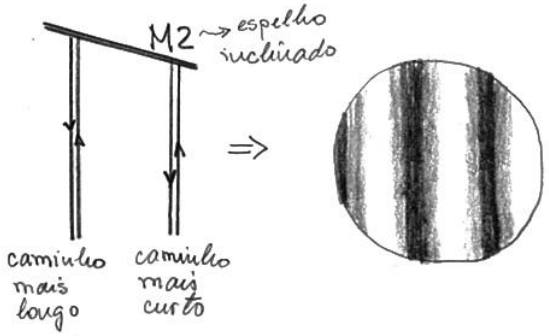
$$2(d_2 - d_1) = (m + \tfrac{1}{2})\lambda$$

haverá interferência destrutiva.

Se os espelhos M1 e M2 fossem exatamente perpendiculares, o telescópio apresentaria um padrão de interferência uniforme (claro, escuro ou intermediário).



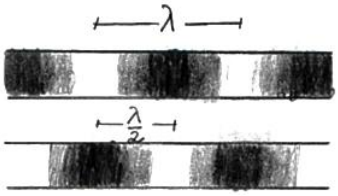
Como os espelhos em geral não ficam exatamente perpendiculares, aparecem franjas claras e escuras, como em uma película de espessura variável.



Se o espelho M2 se mover, uma franja clara se tornará escura, depois clara de novo, depois escura, e assim por diante. Se M2 for deslocado de uma distância γ, um total de

$$m = \frac{2\gamma}{\lambda}$$

franjas passarão pelo telescópio. Por exemplo, se $\gamma = \lambda/4$, teremos um deslocamento de 1/2 franja.



Em geral m é um número grande, e contando-se m e medindo-se y pode-se determinar λ como

$$\lambda = \frac{2y}{m}$$

Alternativamente, se λ for conhecido, isto pode ser usado para se obter uma medida precisa de y:

$$y = \frac{m\lambda}{2}$$

O FÓTON

As experiências de interferência estudadas neste capítulo, bem como outras semelhantes que serão estudadas no próximo, revelam o caráter ondulatório da luz. Existem, contudo, outras experiências, como o efeito fotoelétrico e o efeito Compton (que serão estudados mais adiante), que mostram que a luz se comporta como um feixe de partículas. A idéia da "quantização" da energia da onda eletromagnética foi introduzida em 1900 por Max Planck quando estudava a distribuição da energia eletromagnética emitida por um corpo quente em função do comprimento de onda.

Ao estudar o efeito fotoelétrico, Einstein sugeriu em 1905 que a luz é constituída de "pacotes de energia", ou partículas, que foram depois chamadas de fótons. A energia de um fóton é dada por

$$E = hf$$

onde f é a freqüência da radiação e h é chamada constante de Planck:

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J.s}$$

A teoria da relatividade prevê que uma partícula com velocidade c possui uma relação entre energia e momento linear dada por

$$E = pc$$

Portanto, o fóton tem momento linear dado por

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

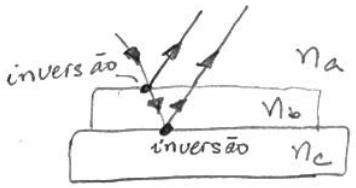
Baseado no fato de que a luz se comporta ora como onda, ora como partícula, Louis de Broglie sugeriu em 1924 que toda partícula possui, associada a ela, uma onda cujo comprimento de onda é dado por

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Em 1927 Davidson e Germer, e independentemente Thomson, verificaram experimentalmente

efeitos de interfência em ondas de eletrons, confirmando a previsão de de Broglie

Ex. 37.7 Película grossa



$n_a = 1,0$ (ar)
$n_b = 1,33$ (água)
$n_c > 1,33$
$t = 1,0$ cm

Ocorre interferência construtiva se

$$2t = m\lambda_b = m\frac{\lambda}{n_b}$$

$$\lambda = \frac{2n_b t}{m}$$

$$m = 40\,000 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \times 1,33 \times 10^{-2}\ m}{40\,000}$$

$\lambda = 665,000$ nm (vermelho-alaranjado)

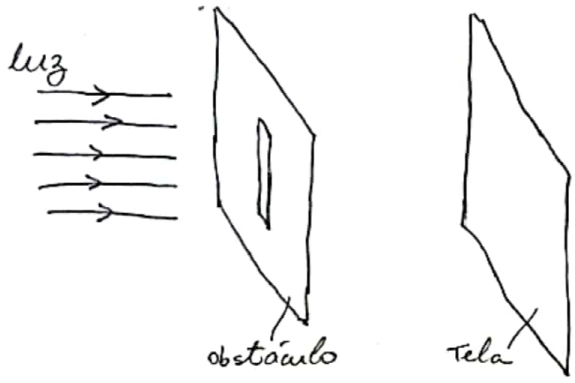
$m = 39999 \Rightarrow \lambda = 665,017$ nm

$m = 39998 \Rightarrow \lambda = 665,033$ nm

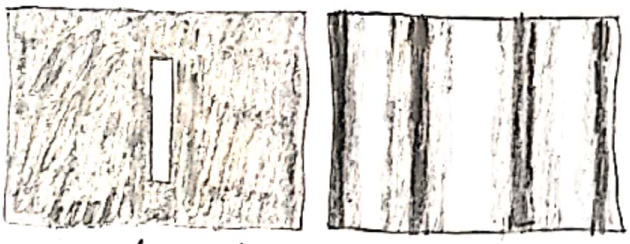
λ muda tão pouco que o olho não é capaz de perceber a mudança de cor. Variando m, aparecem todas as cores na faixa no visível, ou seja, se iluminada com luz branca, a película parecerá branca.

7. DIFRAÇÃO

Considere um feixe de luz monocromático incidindo sobre um obstáculo opaco no qual se fez uma pequena fenda.



De acordo com a ótica geométrica, seria de se esperar o aparecimento de uma imagem nítida da fenda na tela, com sombra ao redor da imagem. No entanto, o que se observa é uma figura com um máximo central largo e claro e várias franjas laterais, mais estreitas e cada vez menos claras.

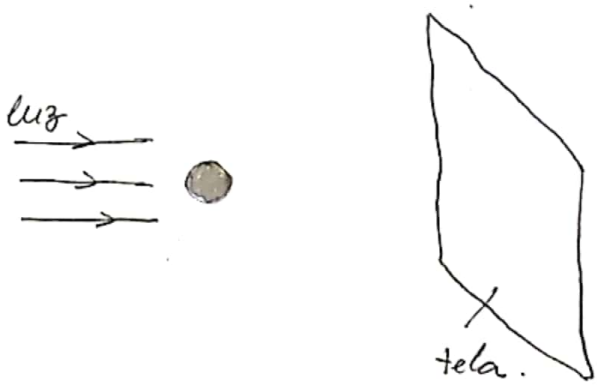


previsto pela ótica geométrica

observado (se a fenda for muito estreita)

Para entender o resultado desta experiência é preciso levar em consideração a natureza ondulatória da luz.

Em outro experimento, se coloca uma pequena esfera entre a fonte de luz e a tela.



De acordo com a ótica geométrica seria de se esperar o aparecimento de uma sombra nítida da esfera sobre a tela. No entanto o que se observa é uma série de anéis claros e escuros com um curioso ponto claro no centro, conhecido como ponto brilhante de Poisson.



previsto pela ótica geométrica

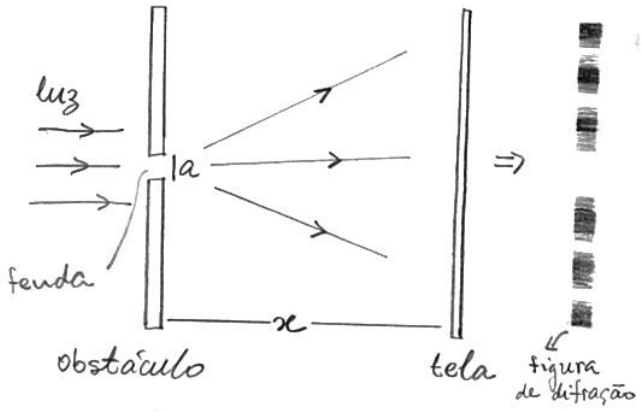
observado (se a esfera for muito pequena)

O fenômeno que explica os resultados acima é chamado difração.

Digitalizado com CamScanner

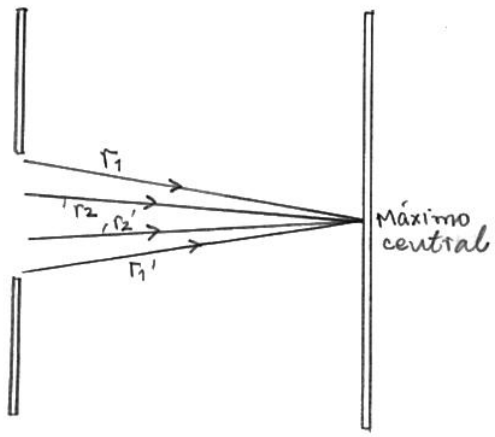
DIFRAÇÃO EM FENDA ÚNICA

Considere um feixe de luz monocromático incidindo sobre um obstáculo com uma fenda estreita. Quando a luz difratada atinge uma tela colocada após o obstáculo forma-se uma figura com franjas claras e escuras, chamada figura de difração.



MÁXIMO CENTRAL

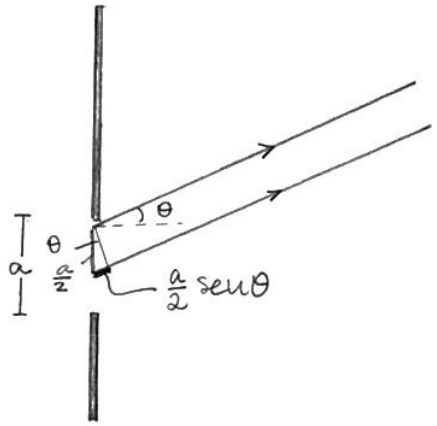
Claramente no centro da tela haverá um máximo porque para cada raio que passa na parte superior há um raio correspondente que passa na parte inferior, tal que interferiram construtivamente.



Se $x \gg a$, os raios são quase paralelos.

1º MÍNIMO

Para determinar a posição do 1º mínimo na tela considere os dois raios da figura abaixo: um no topo e o outro no centro da fenda. Admitido que $x \gg a$, os raios podem ser considerados paralelos.



A diferença de percurso entre os raios é

$$\Delta r = \frac{a}{2}\,\text{sen}\theta$$

Para que haja interferência destrutiva devemos ter

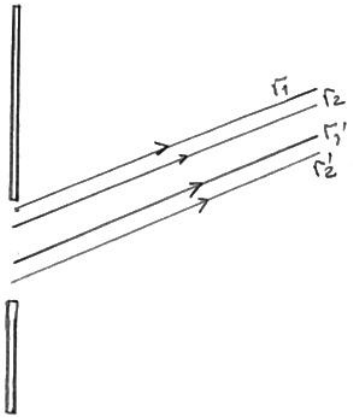
$$\frac{a}{2}\,\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{2}$$

de forma que

$$\text{sen}\theta = \frac{\lambda}{a} \qquad (A)$$

Como assegurar que esta equação de fato leva a interferência destrutiva, já que foram considerados somente dois raios que passam pela fenda? O fato é que cada um dos outros raios que

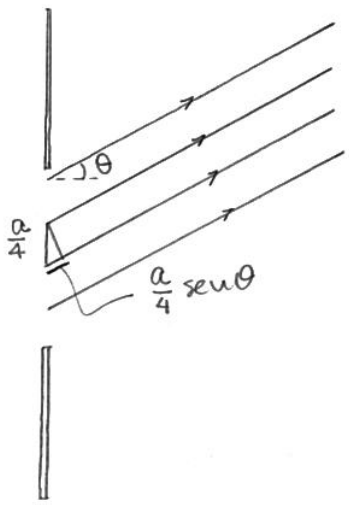
passam na parte superior da fenda possui um raio correspondente na parte inferior, tal que a diferença de caminho entre eles também é $\lambda/2$. Sendo assim, a Eq. (1) de fato corresponde ao 1º mínimo.



2º MÍNIMO

Considere agora os quatro raios mostrados abaixo. A diferença de caminho entre os raios sucessivos é

$$\Delta r = \frac{a}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta$$



Se

$$\frac{a}{4}\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\lambda}{2}$$

haverá interferência destrutiva. É claro, podemos desenhar outros raios tais que interfiram destrutivamente quatro a quatro. A eq que dá a posição angular do 2º mínimo é

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{2\lambda}{a} \qquad (B)$$

seguindo este procedimento (dividindo a fenda em 6, 8, 10, 12, ... trechos) podemos determinar as posições dos outros mínimos. A fórmula geral é

$$\mathrm{sen}\,\theta_m = \frac{m\lambda}{a} \qquad (C)$$

onde $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Note que $m=0$ corresponderia ao máximo central e por isso não pode ser incluído na fórmula acima. Valores negativos de m correspondem a ângulos negativos, ou seja, à parte inferior da tela.

Observe que, na determinação da posição do 1º mínimo poderíamos ter considerado que

$$\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta = \left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$

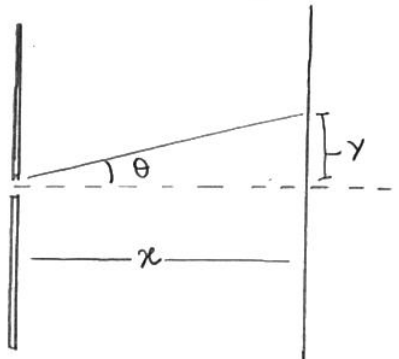
Isto implicaria na equação

$$\text{sen}\,\theta = (2n+1)\frac{\lambda}{a}$$

Mas $2n+1$ é um número inteiro ímpar, de forma que esta equação daria os máximos de ordem ímpar, que já estão incluídos na Eq. (C). Portanto não teríamos nada de novo.

Da Eq. (C) podemos ver que se $\lambda > a$ não haverá sequer o primeiro mínimo porque teríamos $\text{sen}\,\theta > 1$. Neste caso, só temos o máximo central preenchendo toda a tela. Mesmo se $\lambda = a$, o 1º mínimo só ocorre para $\theta = 90°$, e na prática, só temos o máximo central.

A Eq. (C) também pode ser expressa em termos da distância vertical a partir do centro da figura.



Muitas vezes, $\lambda \ll a$, e se m não for muito grande, $\theta \ll 1$. Neste caso

$$\text{sen}\,\theta \simeq \theta \simeq \text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$$

Da eq. (C) podemos escrever

$$\frac{y}{x} = m\frac{\lambda}{a}$$

de forma que

$$y_m = m\frac{x\lambda}{a}$$

$$m = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Os primeiros mínimos ($m = +1$ e $m = -1$) ocorrem para

$$y_1 = \frac{x\lambda}{a} \qquad y_{-1} = -\frac{x\lambda}{a}$$

Portanto, a largura do máximo central é dada por

$$\Delta y_{\text{cen}} = y_1 - y_{-1} = \frac{2x\lambda}{a}$$

A largura dos outros máximos é dada por

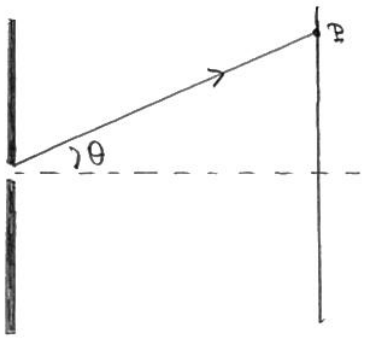
$$\Delta y = \frac{x\lambda}{a}$$

ou seja, é metade da largura do máximo central.

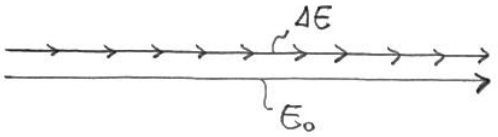
Se a for muito grande (~ 1cm ou mais) os máximos e mínimos estarão tão próximos que o nosso olho só consegue ver uma luminosidade média e as franjas não são observadas.

INTENSIDADE DAS FRANJAS

Em seguida vamos obter uma expressão para a intensidade luminosa na tela em função de θ. Vamos dividir a tela em N trechos e supor uma onda proveniente de cada trecho. Vamos admitir que a amplitude do campo elétrico de cada onda seja ΔE.



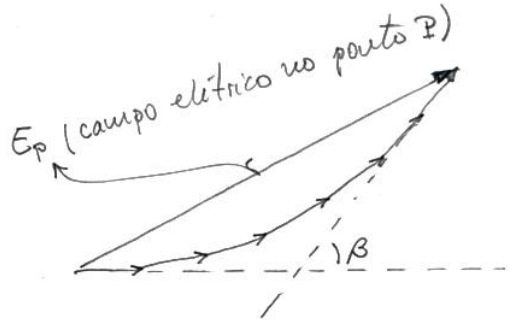
Para $\theta = 0$ (máximo central) todos os campos elétricos chegam a P em fase e o diagrama de fasores para a soma destes campos elétricos é



O campo elétrico resultante tem amplitude máxima, dada por

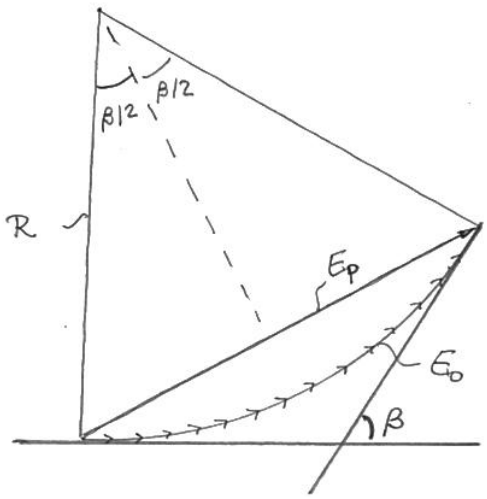
$$E_0 = N\Delta E$$

Para $\theta \neq 0$ os campos elétricos não chegam em fase no ponto P. O diagrama de fasores para a soma dos campos elétricos é



onde β é a diferença de fase entre os campos elétricos da 1ª e última ondas.

O resultado exato é obtido quando se faz $N \to \infty$. Neste caso o diagrama de fasores torna-se um arco de circunferência com ângulo β. Note que o comprimento do arco é exatamente E_0 (a soma dos fasores quando estão todos alinhados)



Da figura, é fácil ver que

$$E_P = 2R \operatorname{sen}(\beta/2)$$

enquanto

$$E_0 = R\beta$$

Eliminando R destas equações temos

$$E_p = \frac{2E_0}{\beta}\operatorname{sen}(\beta/2) = E_0\,\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{(\beta/2)}$$

A intensidade no ponto P é

$$I = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c E_p^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$$

Chamando

$$I_0 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2$$

podemos escrever

$$I = I_0\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2 \qquad (D)$$

A eq. acima parece levar a uma indeterminação quando $\beta = 0$. Contudo, podemos usar o limite

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

para concluir que

$$I(\beta=0) = I_0$$

Este é o valor máximo da intensidade (correspondente ao centro do máximo central).

A diferença de fase β entre o primeiro e último fasores pode ser expressa em termos de θ através da regra de três.

$$\left.\begin{array}{l} \beta \text{ —— } a\operatorname{sen}\theta \\ 2\pi \text{ —— } \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta$$

Substituindo este resultado em (D), temos

$$I = I_0\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta}\right]^2 \qquad (E)$$

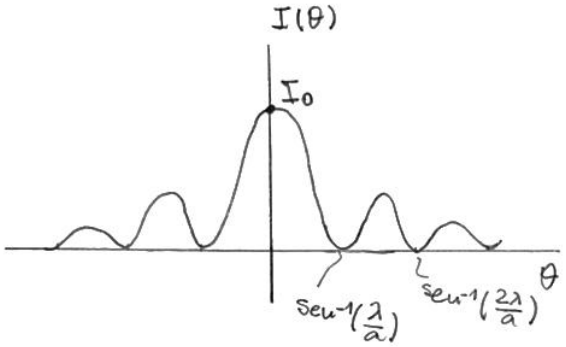
Desta eq. podemos ver que os mínimos de I (onde $I=0$) ocorrem para

$$\frac{\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta_m = m\pi$$

ou $\operatorname{sen}\theta_m = m\dfrac{\lambda}{a}$

onde $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Note que esta eq. nada mais é que a eq. (C). Perceba também que $m=0$ não corresponde a um mínimo porque neste caso teríamos $\theta=0$ que é o centro do máximo central (onde $I = I_0$). É por isso que o máximo central é mais largo que os outros. É como se ele reunisse dois máximos, por causa da ausência do mínimo para $\theta=0$ (veja o gráfico abaixo). Os outros máximos vão diminuindo de intensidade à medida que se afastam do máximo central por causa do fator $(\operatorname{sen}\theta)^2$ que aparece no denominador da Eq. (E).



MÁXIMOS.

Os máximos ocorrem entre os mínimos, dados pela Eq. (C). Eles ocorrem, aproximadamente, para

$$\text{sen}(\beta/2) = 1$$

ou $\frac{\beta}{2} = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$

onde $m = 1, 2, 3, \ldots$

Este resultado é aproximado por causa do fator $(\beta/2)^2$ que aparece no denominador de (D).

Note que $m = 0$ não serve porque levaria a $\beta = \pm\pi$ e estes valores estão incluídos no máximo central.

De acordo com a aproximação acima, a intensidade dos máximos é dada por

$$I_m \simeq \frac{I_0}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$$ → aproximado

Para os 3 primeiros máximos temos:

$m = 1 \rightarrow I_1 \simeq 0{,}0450\ I_0$

$m = 2 \rightarrow I_2 \simeq 0{,}0162\ I_0$

$m = 3 \rightarrow I_3 \simeq 0{,}0083\ I_0$

Se você derivar (D) em relação a β e igualar a zero você pode obter os máximos exatamente (veja prob. 38.42). Fazendo assim, você obterá as seguintes intensidades para os 3 primeiros máximos:

$m = 1 \rightarrow I_1 = 0{,}0472\ I_0$

$m = 2 \rightarrow I_2 = 0{,}0165\ I_0$

$m = 3 \rightarrow I_3 = 0{,}0083\ I_0$

Note que à medida que m cresce a aproximação vai ficando cada vez melhor.

Note também que a intensidade do máximo central é muito maior que as intensidades dos outros máximos.

Se $\lambda \ll a$ e m não for muito grande, a Eq. (C) nos leva à conclusão de que $\theta \ll 1$. Assim $\text{sen}\,\theta \simeq \theta$ e a Eq. (E) pode ser escrita como

$$I = I_0\left[\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi a \theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a \theta}{\lambda}}\right]^2$$

DIFRAÇÃO EM FENDA DUPLA.

Quando estudamos interferência no experimento de fenda dupla de Young no capítulo passado admitimos implicitamente que a largura das fendas era muito pequena ($a \ll \lambda$). Neste caso o máximo central cobre

toda a tela e a intensidade produzida por cada fenda separadamente é praticamente uniforme. A intensidade produzida pelas duas fendas era dada por

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

onde

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \operatorname{sen}\theta$$

se a não for muito menor que λ, o padrão de intensidade produzido por uma fenda é dado pelas Eqs. (D) ou (E). Portanto, no caso geral, a intensidade é dada pela Eq. acima com I_0 substituído pela intensidade de uma fenda, dada por (D) ou (E). Assim, podemos escrever

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right]^2$$

onde

$$\beta = \frac{2\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta$$

Casos especiais:

(1) $a \ll \lambda$.

Neste caso $\beta \ll 1$, e

$$\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2} \simeq 1.$$

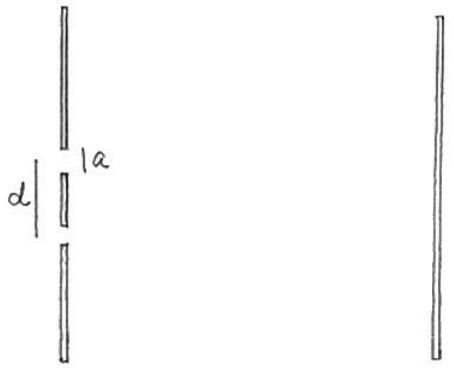
Portanto

$$I = I_0 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

que é o resultado obtido no capítulo passado.

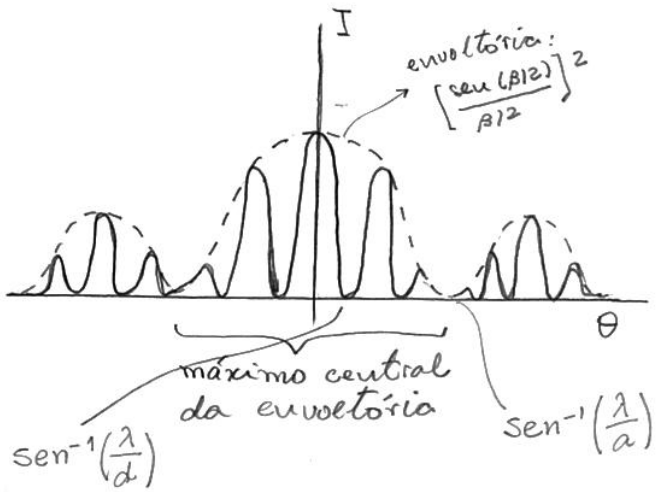
(2) $d = 0$.

Neste caso, é como se tivéssemos uma única fenda de largura a: veja figura.



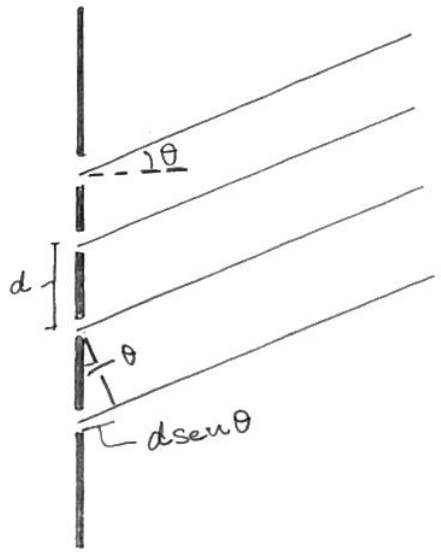
$d = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = 1$.
Portanto, caímos na Eq. (D) para a intensidade produzida por fenda única.

A figura abaixo mostra a intensidade em um experimento de fenda dupla.



FENDAS MÚLTIPLAS

Considere agora um obstáculo com N fendas de largura a separadas por uma distância d (quando N é grande o obstáculo é chamado rede de difração).



A localização dos máximos (principais) é dada por

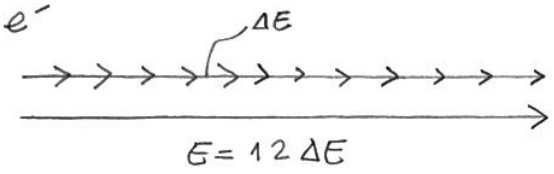
$$d \operatorname{sen}\theta_m = m\lambda$$

onde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Nestes casos a diferença de fase entre dois raios consecutivos é dada por

$$\phi = m\,2\pi$$

O diagrama de fasores para o campo elétrico da onda resultante, no caso de N=12, é



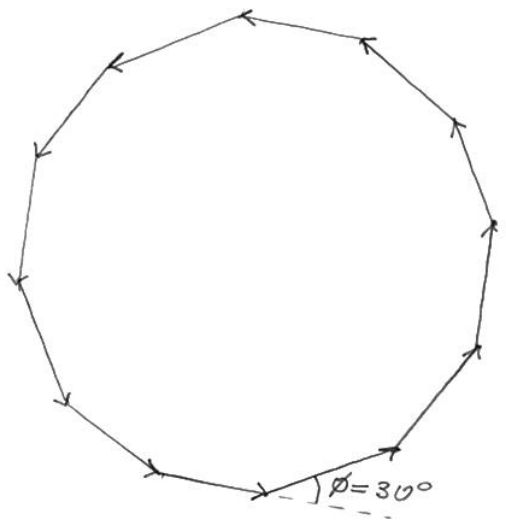
Obs. Vamos supor em nossa análise que $a \ll \lambda$, de forma que a intensidade (ou a amplitude do campo elétrico) devida a cada fenda seja independente de θ.

MÍNIMOS E MÁXIMOS SECUNDÁRIOS

Entre $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ existem mínimos (para os quais $I = 0$) e máximos de menor intensidade que os máximos principais.

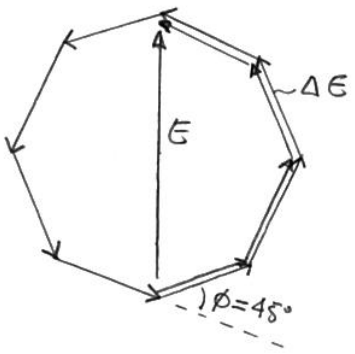
Veja alguns diagramas de fasores para N=12, com valores diferentes de ϕ.

(1) $\phi = 30°$

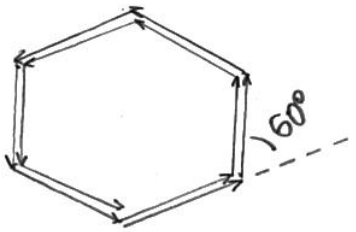


Este caso corresponde a $E = 0$ e dá o primeiro mínimo ao lado do máximo principal.

(2) $\phi = 45°$. Corresponde a um máximo. É o 1º máximo secundário ao lado do máximo principal.



(3) $\phi = 60°$



Temos $E=0$, o que corresponde ao segundo mínimo.

Destas figuras podemos ver que existem mínimos toda vez que tivermos

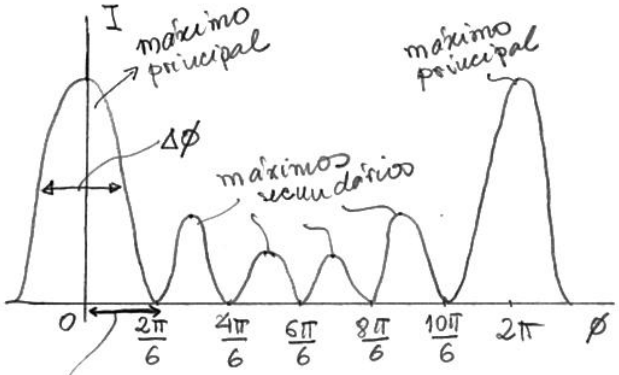
$$\phi_i = i\,\frac{2\pi}{N}$$

$i = 1, 2, \ldots, N-1, N+1, \ldots 2N-1, 2N+1, \ldots$

$i = N$ corresponde a $\phi = 2\pi$, o que dá um máximo principal. $i = 2N \Rightarrow \phi = 4\pi$, que dá outro máximo principal, etc.

Entre dois mínimos consecutivos ocorre um máximo secundário, como mostra a fig abaixo para $N = 6$.

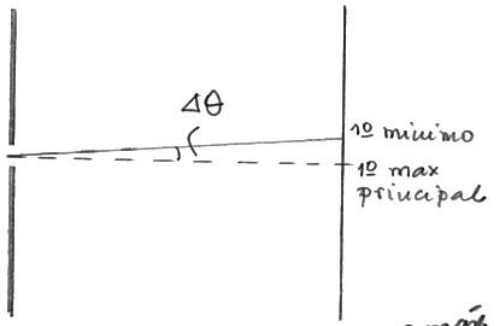
A largura do máximo principal é dada pela diferença entre o 1º mínimo e o centro do máximo principal, ou seja,



$\Delta\phi$ (largura do máximo principal)

$$\Delta\phi = \phi_1 = \frac{2\pi}{N}$$

A largura do máximo principal $\Delta\phi$, corresponde a uma largura $\Delta\theta$ mostrada na figura.



Para calcular $\Delta\theta$ (para o 1º máx principal) podemos usar o fato de que a diferença de caminho é proporcional à diferença de fase:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta\phi \text{ — } d\,\mathrm{sen}\,\Delta\theta \\ 2\pi \text{ — } \lambda \end{array}\right\}$$

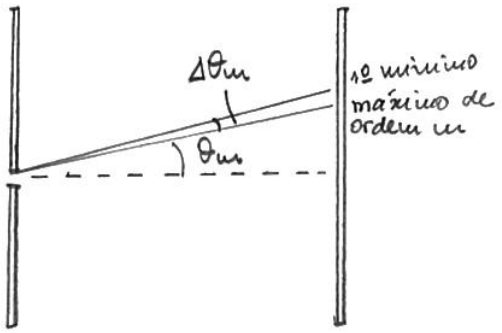
$$d\,\mathrm{sen}\,\Delta\theta = \frac{\lambda\,\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\lambda}{2\pi}\,\frac{2\pi}{N} = \frac{\lambda}{N}$$

(dif de caminho p/ haver o 1º mínimo.)

Admitindo que $\Delta\theta \ll 1$, $\mathrm{sen}\,\Delta\theta \simeq \Delta\theta$, de forma que

$$d\Delta\theta = \frac{\lambda}{N} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd} \quad (F)$$

LARGURA DOS OUTROS MÁXIMOS



A posição do máximo principal de ordem m é dada por

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta_m = m\lambda \quad (G)$$

enquanto a posição do 1º mínimo ao lado desse máximo é dada pela eq.

$$d\,\mathrm{sen}(\theta_m + \Delta\theta_m) = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

ou

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta_m \cos\Delta\theta_m + d\cos\theta_m\,\mathrm{sen}\,\Delta\theta_m = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

supondo $\Delta\theta_m \ll 1$ rad, temos

$$\cos\Delta\theta_m \simeq 1$$

$$\mathrm{sen}\,\Delta\theta_m \simeq \Delta\theta_m$$

de forma que

$$d\,\mathrm{sen}\,\theta_m + d\Delta\theta_m \cos\theta_m = m\lambda + \frac{\lambda}{N}$$

subtraindo (G) desta eq., obtemos

$$d\Delta\theta_m \cos\theta_m = \frac{\lambda}{N}$$

ou

$$\Delta\theta_m = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta_m} \quad (H)$$

Note que se $\theta_m = 0$ (máximo central), (H) reproduz (F).

LARGURA E ALTURA DOS MÁXIMOS PRINCIPAIS

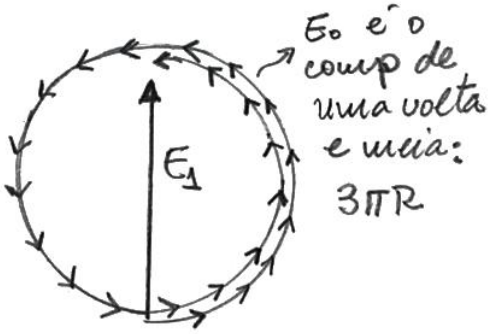
As eqs (F) e (H) mostram que as larguras dos máx principais são proporcionais a $1/N$. Por outro lado, a amplitude do campo elétrico em um máx princ é proporcional a N. Como $I \propto E^2$, a intensidade é proporcional a N^2. Assim os máx princ vão ficando cada vez mais altos (intensos) e mais estreitos à medida que N cresce. Se N for muito grande, como em uma rede de difração, os máx princ se tornam linhas muito estreitas, chamadas raias.

INTENSIDADE RELATIVA DO 1º MÁX SECUNDÁRIO

Se $N \to \infty$ o diagrama de fasores para o 1º máx sec se aproxima da fig a seguir. A relação entre as amplitudes

do campo elétrico para o 0 1º máx sec e o máx princ é dada por

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{2R}{3\pi R} = \frac{2}{3\pi}$$



A relação entre as intensidades é

$$\frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^2 = 0{,}045$$

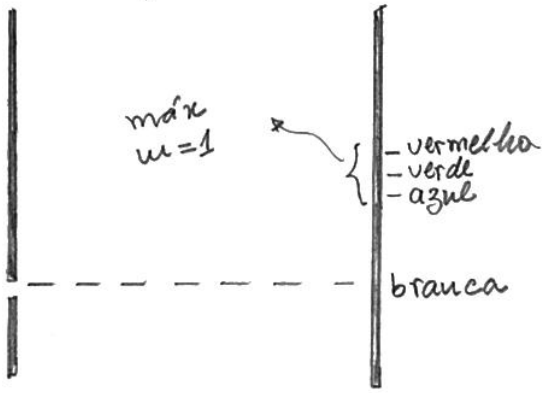
O 1º máx sec é muito mais fraco que o máx principal. Os outros máx sec são ainda mais fracos.

SEPARAÇÃO DAS CORES

Agora suponha que luz branca incide sobre uma rede de difração. O máx central ocorre em $\theta = 0$ para todas as cores mas os outros máximos ocorrem em ângulos diferentes para cores diferentes. Da eq (G),

$$\theta_m = \text{sen}^{-1}\left(\frac{m\lambda}{d}\right)$$

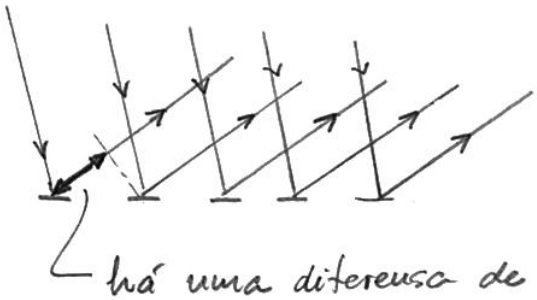
de forma que θ_m cresce com λ. Assim cada max (exceto o central) se torna um "arco-íris".



Ver exs 38.4 e 38.5 no livro!

REDE DE REFLEXÃO

Fendas → sulcos ou saliências refletoras

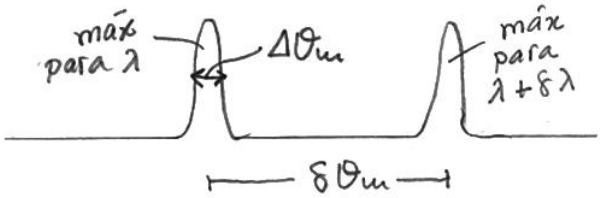


há uma diferença de caminho que depende do ângulo de observação.

Para um dado comp de onda e para um dado ângulo de observação, a interferência pode ser const ou dest. se o ângulo mudar, muda a cor aparente da superfície. É o que ocorre, por exemplo, com um CD: à medida que giramos o CD, vemos franjas coloridas!

PODER DE RESOLUÇÃO CROMÁTICO

Suponha que um feixe contenha dois comprimentos de onda próximos, λ e $\lambda+\delta\lambda$. O máximo de ordem m para $\lambda+\delta\lambda$ ocorre para um ângulo ligeiramente diferente do máx para λ. Vamos chamar essa diferença de $\delta\theta_m$.



Não confundir:

$\Delta\theta_m$ → largura do máx

$\delta\theta_m$ → separação entre os máx para λ e $\lambda+\delta\lambda$.

Podemos calcular $\delta\theta_m$ em termos de $\delta\lambda$ olhando para a eq. (G) como

$$\theta_m \equiv \overbrace{\theta_m(\lambda)}^{\text{função de}}$$

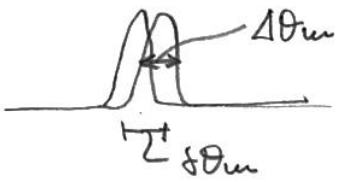
Diferenciando (G) de ambos os lado, temos

$$d\cos\theta_m\,\delta\theta_m = m\,\delta\lambda$$

$$\Rightarrow \delta\theta_m = \frac{m\,\delta\lambda}{d\cos\theta_m} \quad (I)$$

Obs. Usamos $\delta\theta_m$ e vez de $d\theta_m$ para não confundir com a distância entre as fendas, d.

Um critério razoável para se conseguir separar os dois máximos é que $\delta\theta_m \geq \Delta\theta_m$. No limite, $\delta\theta_m = \Delta\theta_m$



Igualando (H) e (I) obtemos a situação limite

$$m\,\delta\lambda = \frac{\lambda}{N} \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

Esta equação fornece o menor $\Delta\lambda$ que se consegue separar.

O poder de resolução cromático de uma rede de difração é definido como

$$R \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN$$

Ex. 38.6

Obtenha o menor número de fendas para resolver o dupleto de sódio ($\lambda = 589{,}00$ nm e $\lambda = 589{,}59$ nm) em 1º e 4º ordem.

Sol.

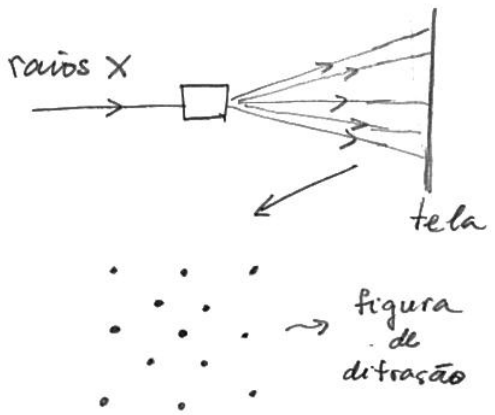
$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = \frac{589\,nm}{0{,}59\,nm} = mN$$

$mN \simeq 1000$

$m = 1 \Rightarrow N = 1000$
$m = 4 \Rightarrow N = 250$

DIFRAÇÃO DE RAIOS X

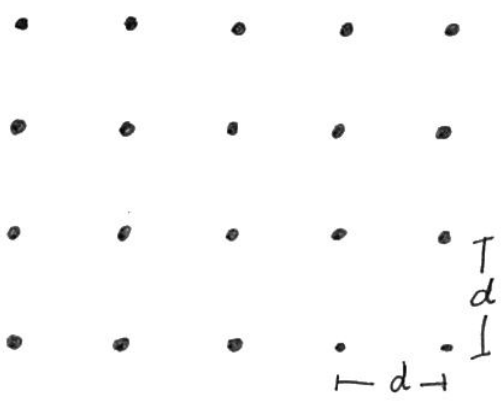
Quando radiação com λ na faixa próxima a $1\text{Å}\ (10^{-10}\,m)$ (raios X) incide sobre um cristal forma-se uma figura de difração

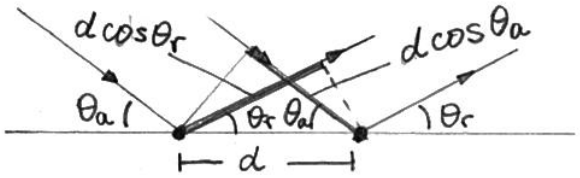


A fig. de dif. mostra pontos claros bem nítidos. Em geral a fig permite obter a estrutura do cristal: como os átomos estão organizados e as distâncias entre os átomos.

Para se ter uma idéia, considere uma rede quadrada no plano.

Pode-se ver que os raios refletidos pelos átomos da 1ª linha interferem construtivamente se os ângulos θ_a e θ_r forem iguais.

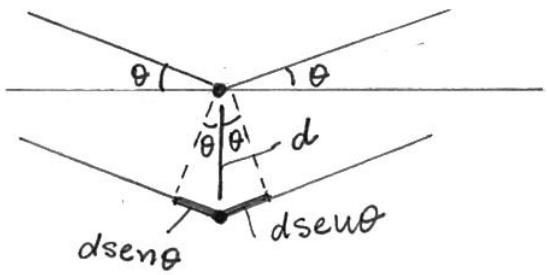




Os dois raios percorrem a mesma distância da fonte até o observador se $\theta_r = \theta_a$.

A diferença de caminho entre raios refletidos por átomos de linhas diferentes é

$$2d\,\mathrm{sen}\,\theta$$

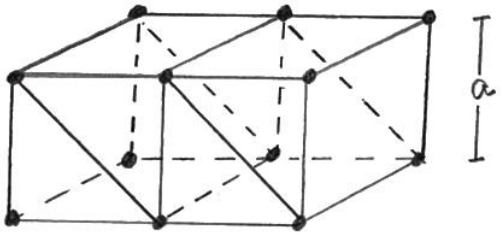


Haverá int. const. se

$$2d\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda$$

condição de Bragg

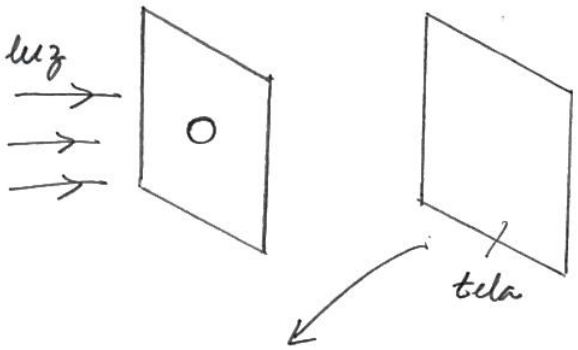
Veja pela fig 3D abaixo que d pode ser a ou $a/\sqrt{2}$ (ou outro valor).
Isso gera uma variedade maior de picos na tela.

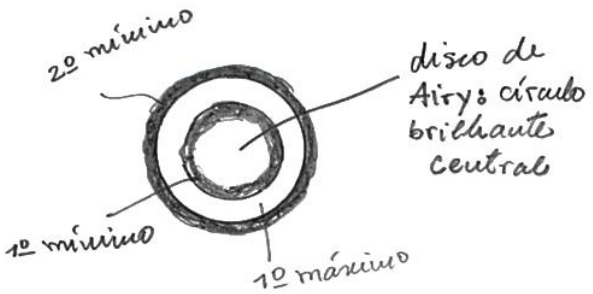


Ver Ex 38.7 no livro!

ABERTURA CIRCULAR

Quando luz monocromática incide sobre um obstáculo opaco com uma pequena abertura circular, observa-se uma figura de difração com anéis claros e escuros.





Pode-se mostrar os primeiros mínimos ($I=0$) e máximos ocorrem para:

$$\theta_1^{min} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}22\lambda}{D}\right)$$

$$\theta_1^{max} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}63\lambda}{D}\right)$$

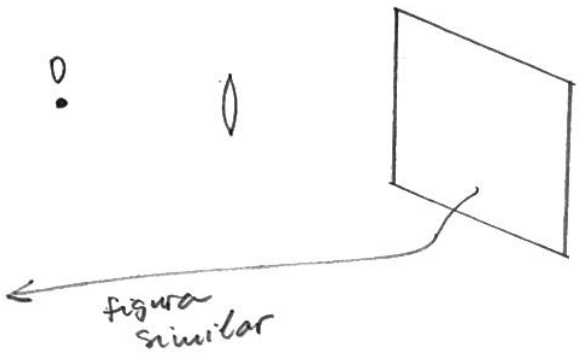
$$\theta_2^{min} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{2{,}23\lambda}{D}\right)$$

onde D é o diâmetro do orifício.

Em geral, ~85% da energia luminosa da fig de dif se concentra no disco de Airy.

LENTE

se uma lente de diâmetro D for colocada entre um objeto e uma tela de observação, observa-se uma fig de dif similar à do orifício. As posições dos máx e mín são dadas pelas mesmas eqs.



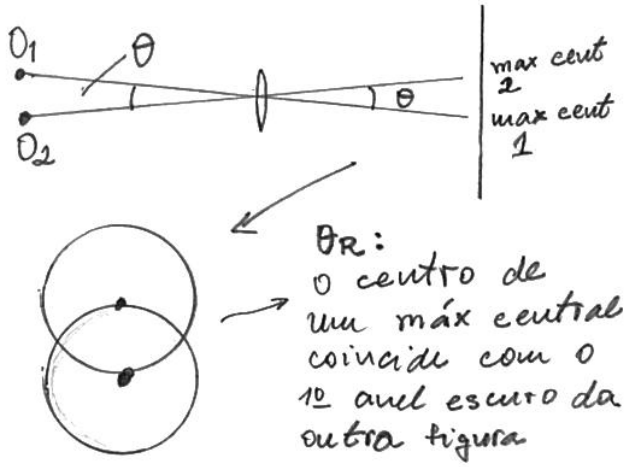
As figs de dif de dois objetos (pontuais) próximos podem se superpor a ponto de dificultar a separação das imagens.

O critério para que se possa separar as imagens, proposto por Rayleigh, é que a separação angular entre os objetos obedeça a relação

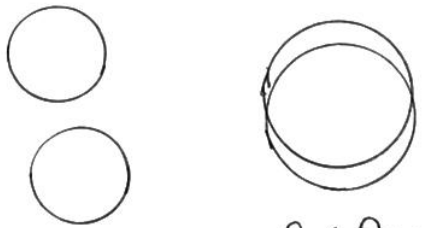
$$\theta \geq \theta_R$$

onde

$$\theta_R = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}22\lambda}{D}\right)$$



Critério de Rayleigh:



$\theta > \theta_R$: é possível separar as imagens.

$\theta < \theta_R$: não é possível separar as imagens.

Quando $\lambda \ll D$, θ_R é pequeno de forma que

$$\theta_R \simeq \frac{1{,}22\lambda}{D}$$

Ex 38.4 Determine a largura angular do espetro visível de 1º ordem produzido por uma rede com 600 fendas por mm.

Sol. $1\,mm = 600 \times d$

$$d = \frac{1}{600}\,mm = 1{,}667\times10^{-6}\,mm$$

ou $d = 1667\,nm$

$$\operatorname{sen}\theta_m = \frac{m\lambda}{d} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\lambda}{d}$$

$$\operatorname{sen}\theta_{1\,viol} = \frac{400\,nm}{1667\,nm} = 0{,}2400$$

$$\theta_{1\,viol} = 13{,}9^\circ$$

$$\operatorname{sen}\theta_{1\,verm} = \frac{700\,nm}{1667\,nm} = 0{,}4199$$

$$\theta_{1\,verm} = 24{,}8^\circ$$

$$\Delta\theta_1 = \theta_{1\,verm} - \theta_{1\,viol} = 10{,}9^\circ$$

Ex 38.5 Mostre que a extremidade violeta do espectro de 3º ordem se superpõe com a extremidade vermelha do espectro de 2º ordem.

Sol.

$$\operatorname{sen}\theta_{3\,viol} = \frac{3\times400\,nm}{1667\,nm}$$

$$= 0{,}7199$$

$$\theta_{3\,viol} = 46{,}0^\circ$$

$$\operatorname{sen}\theta_{2\,verm} = \frac{2\times700\,nm}{1667\,nm}$$

$$= 0{,}8398$$

$$\theta_{2\,verm} = 57{,}1^\circ$$

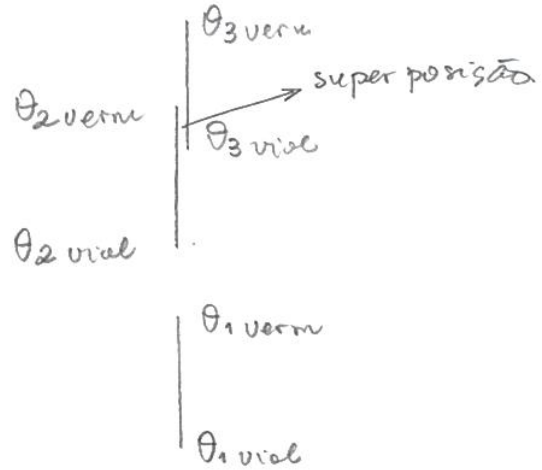
Como $\theta_{2\,verm} > \theta_{3\,viol}$, os espectros se superpõem.

Isso ocorre independente do valor de d:

$$\operatorname{sen}\theta_{3\,viol} = \frac{3\times400\,nm}{d} = \frac{1200\,nm}{d}$$

$$\operatorname{sen}\theta_{2\,verm} = \frac{2\times700\,nm}{d} = \frac{1400\,nm}{d}$$

Assim $\theta_{2\,verm} > \theta_{3\,viol}$ para qualquer d.



Ex. 38.8 Imagem formada em uma câmera fotográfica. Lente com $f = 50\,mm$; Luz com $\lambda = 500\,nm$.
$s = 9{,}0\,m$.
Calcular as distâncias mínimas entre dois pontos no objeto e na imagem que se consegue resolver quando o diâmetro da lente é:

(a) $D = f/2$.

sol. $D = 50\,mm/2 = 25\,mm$

$$\theta_R = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}22\lambda}{D}\right)$$

$$= \text{sen}^{-1}\left(\frac{1{,}22 \times 500\times10^{-9}\,m}{25\times10^{-3}\,m}\right)$$

$$= \text{sen}^{-1}(2{,}4\times10^{-5}\,rad)$$

$$= 2{,}4\times10^{-5}\,rad$$

$$\frac{y_{min}}{s} = \theta_R$$

$$y_{min} = 9{,}0\,m \times 2{,}4\times10^{-5}$$

$$y_{min} = 0{,}22\,mm$$

$$\frac{y'_{min}}{s'} = \theta_R$$

como $s \gg f$, $s' \simeq f$

$$y'_{min} = f\,\theta_R$$

$$= 50\times10^{-3}\,m \times 2{,}4\times10^{-5}$$

$$y'_{min} = 1{,}2\times10^{-3}\,mm$$

(b) $D = f/16$

sol. $D = 50\,mm/16 = 3{,}125\,mm$

$$\theta_R \simeq \frac{1{,}22\lambda}{D}$$

$$= \frac{1{,}22\times500\times10^{-9}\,m}{3{,}125\times10^{-3}\,m}$$

$$= 1{,}95\times10^{-4}\,rad \rightarrow \text{8 vezes maior}$$

$$y_{min} = 9{,}0\,m \times 1{,}95\times10^{-4}\,rad$$

$$= 1{,}8\,mm \rightarrow 8\times$$

$$y'_{min} = 50\times10^{-3}\,m \times 1{,}95\times10^{-4}\,rad$$

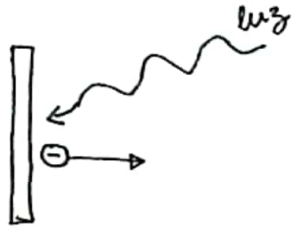
$$= 9{,}8\times10^{-3}\,mm \rightarrow 8\times$$

Note que com aberturas maiores se consegue resolver distâncias menores. O problema é que lentes maiores apresentam mais aberrações associadas com raios não paraxiais.

8. FÓTONS, ELÉTRONS E ÁTOMOS

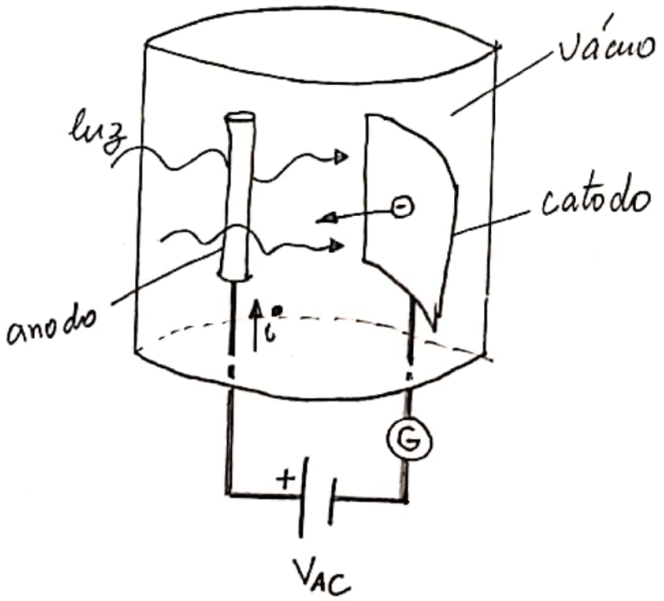
EFEITO FOTOELÉTRICO (Hertz 1887)

Elétrons são emitidos quando luz incide sobre uma superfície.



O elétron está ligado ao material, e para ser removido ele precisa absorver uma energia (da luz) que deve ser suficiente para superar essa energia de ligação. A energia mínima que um elétron deve absorver para escapar do material é chamada função trabalho, ϕ.

OS EXPERIMENTOS DE HALLWACHS E LENARD (1888–1900)

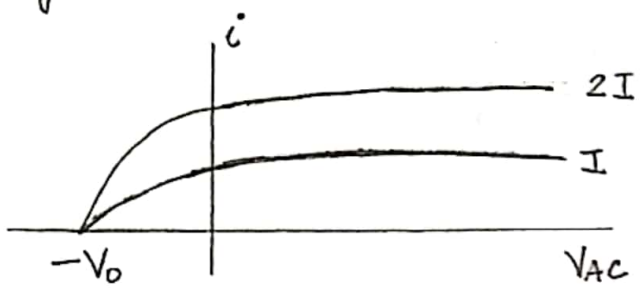


O feixe de luz incide sobre a superfície do catodo e remove elétrons. Os elétrons são acelerados pela ddp e chegam ao anodo, produzindo uma corrente que é medida no galvanômetro.

RESULTADOS OBTIDOS

Existe uma "frequência de corte", f_0, abaixo da qual não há corrente (nenhum elétron é removido).

Para uma frequência $f > f_0$ obtém-se um gráfico de $i \times V_{AC}$ do tipo abaixo, onde V_{AC} positivo indica que o potencial do anodo é maior que o do catodo (como na figura).



Quando V_{AC} é grande, a corrente atinge um valor de saturação, indicando que todos os elétrons removidos chegam ao anodo.

A corrente de saturação é proporcional à intensidade, indicando que luz com intensidade maior remove mais

Digitalizado com CamScanner

elétrons.

Mesmo com campo elétrico no sentido contrário (V_{AC} negativo), pode haver corrente. Isto significa que muitos elétrons são removidos com energia cinética suficiente para vencer a barreira de potencial e chegar ao anodo.

No entanto há uma barreira de potencial máxima que os elétrons podem superar. Se $V_{AC} < -V_0$, onde V_0 é chamado potencial de corte, não há corrente (os elétrons não conseguem chegar ao anodo)! Isto sugere que a energia cinética máxima com que os elétrons são removidos é $K_{max} = eV_0$. Para chegar a essa conclusão, considere o teorema do trabalho-energia cinética:

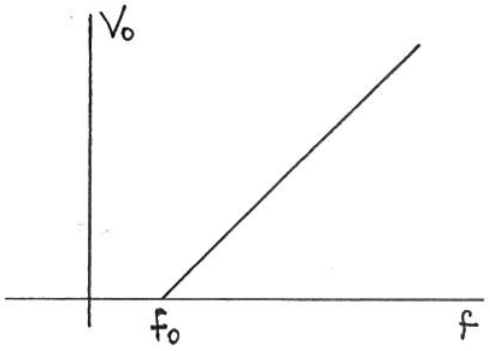
$$W_{ext} = \Delta K \quad \begin{matrix} \text{no anodo} \\ \text{no catodo} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \quad -eV_0 = 0 - K_{máx}$$

$$\Rightarrow \quad K_{max} = eV_0$$

O potencial de corte V_0 depende do material do catodo mas não da intensidade da luz.

Um gráfico típico do potencial de corte em função da frequência da luz é mostrado a seguir, onde f_0 é a frequência de corte, abaixo da qual não há corrente.



Alguns dos resultados mencionados acima não podem ser explicados pela física clássica.

(1) De acordo com a física clássica, intensidade maior significa que os elétrons deveriam absorver mais energia da luz, portanto deveriam superar uma barreira de potencial maior. Mas o experimento mostra que V_0 não depende da intensidade!

(2) A física clássica não explica a existência de uma frequência de corte. Ela prevê que aumentando-se a intensidade se consegue remover elétrons, mesmo quando $f < f_0$. Mas não é isso que acontece!

(3) De acordo com a física clássica, deveria haver um intervalo de tempo entre a incidência da luz e o aparecimento da corrente. Esse tempo seria

o necessário para o elétron acumular uma energia maior que eV_0. Mas a experiência mostra que a corrente aparece instantaneamente.

EXPLICAÇÃO DE EINSTEIN (1905)

Einstein usou uma hipótese formulada por Planck em 1900 para explicar a radiação emitida por um corpo negro.

A luz é composta por pequenos pacotes de energia, chamados fótons (ou quanta). A energia de um fóton é

$$\epsilon = hf = h\frac{c}{\lambda}$$

onde h é a constante de Planck.

Um elétron pode absorver um fóton mas não meio fóton: ou absorve toda a energia do fóton ou não absorve nada.

Se a energia do fóton for menor que a função trabalho, ϕ, o elétron não pode ser removido. Então

$$hf_0 = \phi$$

Se um fóton com $f > f_0$ for absorvido, o elétron recebe uma energia **hf.** se **ele** gastar uma certa energia para escapar do material, o que sobra é transformado em energia cinética:

$$K = hf - E_{lig}$$

Para os elétrons com energia de ligação mínima,

$$K_{max} = hf - \phi$$

Como $K_{max} = eV_0$,

$$eV_0 = hf - \phi$$

de forma que

$$V_0 = \frac{h}{e}f - \frac{\phi}{e}$$

o que explica a relação linear entre V_0 e f.

Note que:

(1) A inclinação da reta é h/e. Medindo-se a inclinação e considerando que

$$e = 1{,}602 \times 10^{-19} C$$

pode-se determinar h:

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ J.s$$

ou $h = 4{,}136 \times 10^{-15}\ eV.s$

(2) A reta corta o eixo f em $f = f_0$ (freq. de corte). Assim

$$0 = hf_0 - \phi \Rightarrow \phi = hf_0$$

ϕ e f_0 dependem do material do catodo.

MOMENTO DO FOTON

A relação relativística entre momento e energia é

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}$$

O fóton tem velocidade c e massa de repouso nula, tal que

$$E = pc$$

Portanto

$$p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

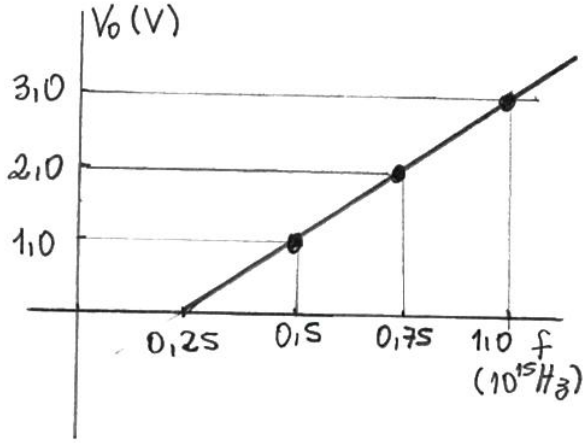
EX. Em um experimento $V_0 = 1{,}0\,V$ para $\lambda = 600$ nm, $2{,}0\,V$ para $\lambda = 400$ nm e $3{,}0\,V$ para $\lambda = 300$ nm. Determinar h e ϕ.

Sol. $f = 3{,}0 \times 10^8\ m/s\ /\ \lambda$

$\lambda = 600$ nm $\Rightarrow f = 0{,}5 \times 10^{15}\ Hz$

400 nm $\Rightarrow f = 0{,}75 \times 10^{15}\ Hz$

300 nm $\Rightarrow f = 1{,}0 \times 10^{15}\ Hz$



A inclinação é

$$\frac{h}{e} = \frac{3{,}0\,V - 1{,}0\,V}{(1{,}0 - 0{,}5) \times 10^{15}\,Hz}$$

$$= 4{,}0 \times 10^{-15}\ \frac{J.s}{C}$$

Multiplicando por e, temos

$$h = 6{,}4 \times 10^{-34}\ J.s \quad (3\%\ \text{de erro})$$

A reta corta o eixo dos f's em $f_0 = 0{,}25 \times 10^{15}\ Hz$. Assim

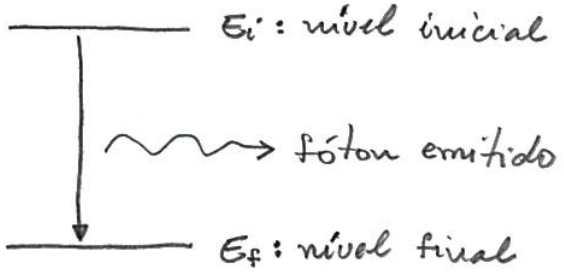
$$\phi = hf_0 = 6{,}4 \times 10^{-34}\ J.s \times 0{,}25 \times 10^{15}\ Hz$$

$$\phi = 1{,}6 \times 10^{-19}\ J = 1{,}0\ eV$$

ESPECTROS ATÔMICOS

Em 1913 Niels Bohr propôs um modelo que explicou os espectros emitidos por átomos.

A ideia é que os átomos podem existir em certos níveis de energia específicos. Quando um átomo passa de um nível de maior energia para outro de menor energia ele emite um fóton cuja energia é igual à diferença de energia entre os níveis.



$$E = hf = E_i - E_f$$

O conjunto das linhas emitidas pelo átomo é chamado espectro de emissão.

O ESPECTRO DO HIDROGÊNIO

Por possuir somente um elétron, o H possui um espectro mais simples que os outros átomos.

O espectro do H possui 4 linhas na região visível chamadas H_α, H_β, H_γ e H_δ, cujos comprimentos de onda são 656,3 nm; 486,1 nm; 434,1 nm e 410,2 nm.

Em 1885 Johann Balmer mostrou que estes comprimentos de onda podem ser expressos através da fórmula

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 3,4,5 \text{ e } 6$$

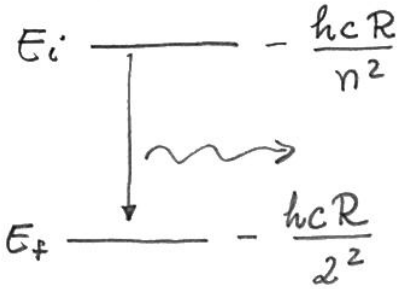
onde $R = 1,097 \times 10^7 m^{-1}$ é chamado cte de Rydberg.

Na verdade existem outras linhas correspondentes a $n = 7,8,9\ldots$, mas elas estão na região do ultravioleta.

Considerando a energia de um fóton, dada por $E = hf = hc/\lambda$, temos

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = hcR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

De acordo com o modelo de níveis de energia proposto por Bohr, a representação seria



Assim

$$h\frac{c}{\lambda} = -\frac{hcR}{n^2} - \left(-\frac{hcR}{2^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

que é a fórmula de Balmer.

A série de Balmer, e outras que eram conhecidas em 1913, sugerem que as energias possíveis do átomo de Hidrogênio são dadas por

$$E_n = -\frac{hcR}{n^2}$$

onde

$$hcR = 6,626 \times 10^{-34} J.s \times 3,0 \times 10^8 m/s \times 1,097 \times 10^7 m^{-1}$$

$$= 2,179 \times 10^{-18} J$$

$$= 13,6 \text{ eV}$$

Assim

$$E_n = -\frac{13{,}6\ eV}{n^2}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ (número quântico)

Mais à frente mostraremos como Bohr chegou nesta expressão para a energia do átomo de hidrogênio.

As principais séries do H são:

Série de Lyman (1906)

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

no ultravioleta

Série de Balmer (1885)

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

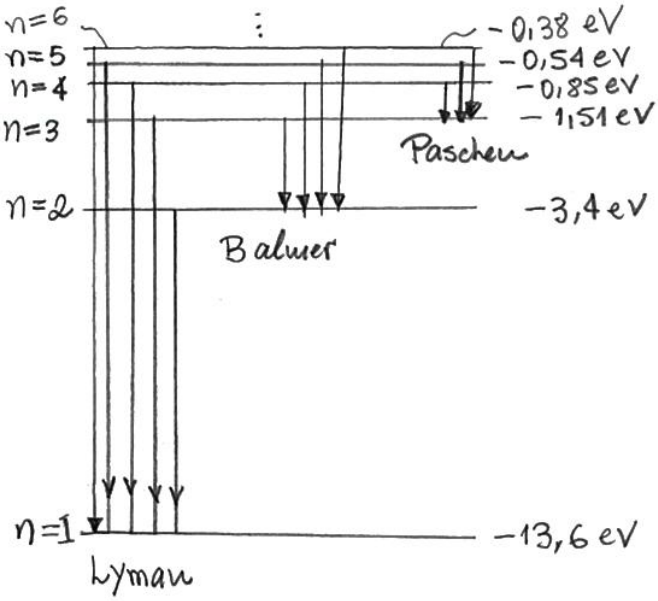
visível e ultravioleta

Série de Paschen (1908)

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n = 4, 5, 6, \ldots$$

infravermelho

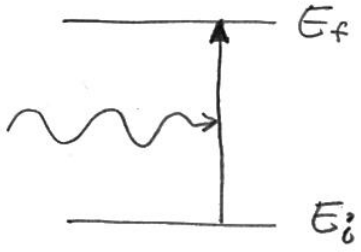
Vejas as séries de Brackett e Pfund no livro.



ABSORÇÃO

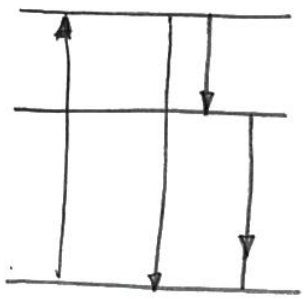
Um átomo pode absorver um fóton e passar de um nível de energia menor para outro de energia maior. Para isso acontecer, a energia do fóton deve ser

$$E = hf = E_f - E_i$$



FLUORESCÊNCIA

Um átomo absorve um fóton, atinge um nível excitado e depois volta ao estado fundamental em etapas. O fóton absorvido pode estar no UV e os fótons emitidos no visível, por exemplo.

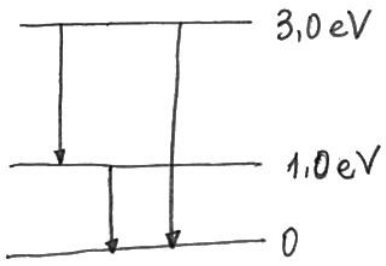


O tempo que o átomo permanece no estado excitado (em média) antes de decair para um nível de menor energia é chamado vida média do nível.

EX. Um átomo hipotético possui níveis excitados com 1,0 eV e 3,0 eV acima do nível fundamental. Determine as freq e comp de onda que o átomo pode:
(a) emitir ao ser excitado;
(b) absorver, estando inicialmente no nível fundamental.

sol.

(a)



$$hf = \Delta E \Rightarrow f = \frac{\Delta E}{h}$$

$\Delta E = 1,0\ eV \Rightarrow f = 2,42 \times 10^{14} Hz$

$2,0\ eV \Rightarrow f = 4,84 \times 10^{14} Hz$

$3,0\ eV \Rightarrow f = 7,25 \times 10^{14} Hz$

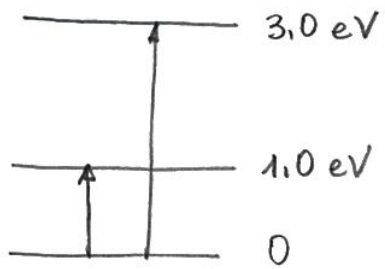
$\lambda = c/f$

$\Delta E = 1,0\ eV \Rightarrow \lambda = 1240\ nm$

$2,0\ eV \Rightarrow 620\ nm$

$3,0\ eV \rightarrow 414\ nm$

(b)



$\Delta E = 1,0\ eV \Rightarrow f = 2,42 \times 10^{14} Hz$

$\Rightarrow \lambda = 1240\ nm$

$\Delta E = 3,0\ eV \Rightarrow f = 7,25 \times 10^{14} Hz$

$\Rightarrow \lambda = 414\ nm$

A EXPERIÊNCIA DE FRANCK-HERTZ (1914)

Elétrons acelerados incidindo sobre vapor de mercúrio de uma lâmpada fazem a lâmpada emitir em 0,25 μm quando a energia dos elétrons é maior que 4,9 eV.

Explicação: O 1º nível excitado do Hg está 4,9 eV acima do nível fundamental. Para que um elétron possa excitar um átomo por colisão ele deve ter energia no mínimo igual a 4,9 eV. Quando o átomo volta ao nível

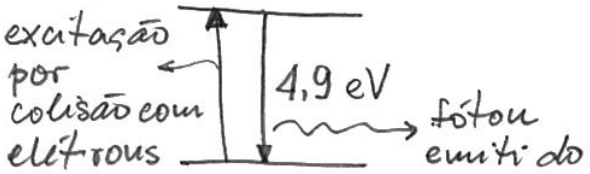
fundamental ele emite um fóton com energia

$$hf = h\frac{c}{\lambda} = 4{,}9\ eV$$

$$\lambda = \frac{hc}{4{,}9\ eV}$$

$$= \frac{4{,}136\times10^{-15}\ eV.s \times 3{,}0\times10^{8}\ m/s}{4{,}9\ eV}$$

$$\lambda = 2{,}5\times10^{-7}\ m = 0{,}25\ \mu m$$



Historicamente a experiência de Franck-Hertz se constituiu em forte evidência da existência de níveis de energia nos átomos.

MODELOS ATÔMICOS

HISTÓRICO

Em 1897 Thomson descobriu o elétron e mediu a razão e/m.

Em 1909 Millikan mediu a carga do elétron, e portanto sua massa:

$e = 1{,}6\times10^{-19}\ C$

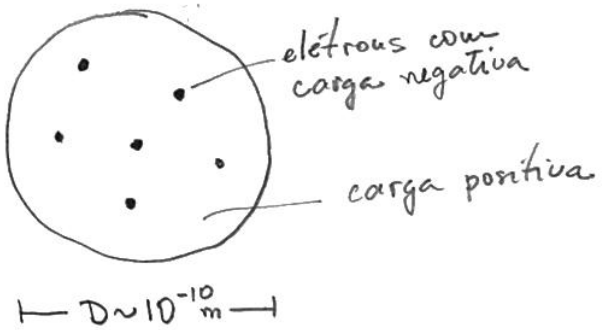
$m = 9{,}1\times10^{-31}\ kg.$

Já se conhecia as massas de vários átomos. Com a medida de m descobriu-se que a massa do H (o átomo mais leve) é ~ 1840 vezes maior que a massa do elétron.

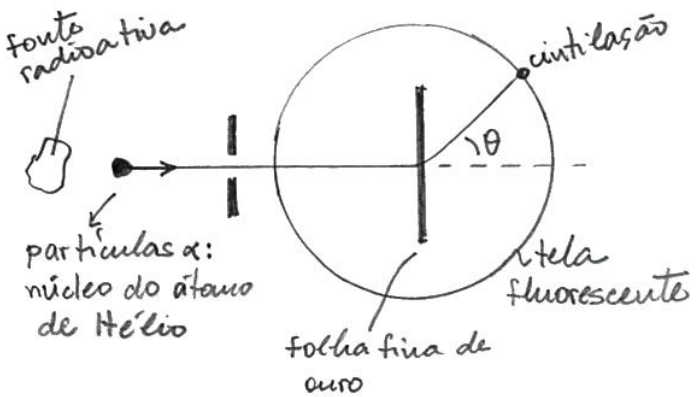
Já se sabia, por ex. por considerações de densidade, que as dimensões típicas de um átomo são $\sim 10^{-10}$ m.

O MODELO DE THOMSON

Baseado no fato de que os átomos são neutros, Thomson concluiu que eles deveriam conter uma carga positiva para compensar as cargas negativas do elétrons, e propôs o seguinte modelo atômico:



O EXPERIMENTO DE RUTHERFORD, GEIGER E MARSDEN (1910-1911)



Geiger e Marsden contaram o número de partículas α desviadas em função do ângulo de desvio, θ. O resultado foi surpreendente: algumas partículas eram defletidas para ângulos muito grandes, inclusive 180°. Como explicar?

Como $M_\alpha \simeq 7300\, m$, os elétrons não poderiam desviar as partículas α de ângulos significativos. O desvio só poderia ser devido à carga positiva.

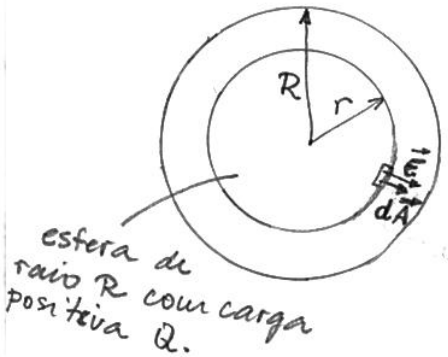
Como o átomo é neutro, o campo elétrico fora do átomo deveria ser muito pequeno (ou zero). Assim as partículas α deveriam penetrar no interior do átomo.

CAMPO ELÉTRICO NO INTERIOR DO ÁTOMO

Vamos desprezar a contribuição dos elétrons para o campo elétrico.

Da lei de Gauss

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$



esfera de raio R com carga positiva Q.

Tomando uma esfera de raio r como superfície gaussiana, temos

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = E\int dA = E\,4\pi r^2$$

$$\left.\begin{array}{l} q_{int} \text{ — } Q \\ \frac{4\pi}{3}r^3 \text{ — } \frac{4\pi}{3}R^3 \end{array}\right\} \Rightarrow q_{int} = Q\frac{r^3}{R^3}$$

↳ supondo a carga uniformemente distribuída.

Assim

$$E\,4\pi r^2 = \frac{Q\,r^3}{\epsilon_0 R^3}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{R^3}$$

O valor máximo do campo elétrico ocorre quando $r=R$, e é dado por

$$E_{max} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

No caso de folhas de ouro, $Q = 79\,e$.

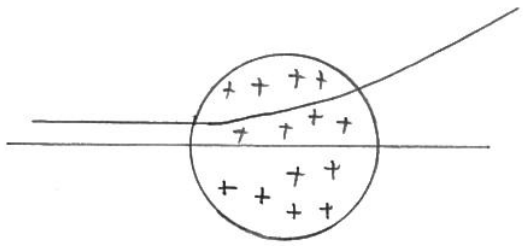
Rutherford mostrou que se $R = 10^{-10}\,m$, o campo elétrico seria muito fraco para desviar as partículas α para trás ($\theta = 180°$). Ver exemplo a seguir

Note que se tivéssemos levado em conta as cargas dos elétrons, o campo elétrico seria menor ainda!

Rutherford percebeu que R deveria ser da ordem de $10^{-14}\,m$ para que o campo

elétrico fosse suficiente para produzir desvios com grandes ângulos. Então ele propôs um modelo atômico semelhante ao sistema solar: um núcleo massivo com diâmetro da ordem de 10^{-14} m contendo toda a carga positiva, com os elétrons orbitando em torno do núcleo com órbitas da ordem de 10^{-10} m.

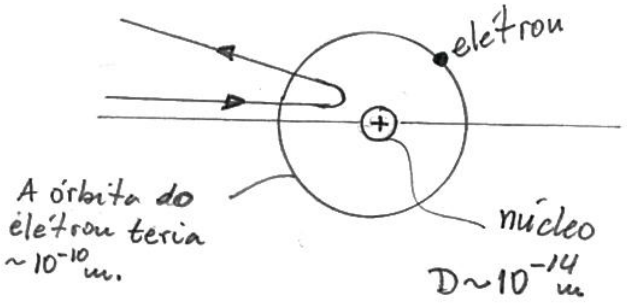
1) Modelo de Thomson



$D \sim 10^{-10}$ m

O desvio teria que ser muito pequeno, menos que 1°.

2) Modelo de Rutherford



A maioria das partículas α seria desviada de ângulos pequenos, mas seria possível desvios de até 180° (para trás).

Este problema é estudado em detalhes em um curso de mecânica clássica.

EX. Que energia cinética uma partícula α deveria ter para aproximar de uma distância de 5×10^{-14} m do centro do núcleo de Au?

sol.



Como $M_\alpha << M_{Au}$, vamos supor que a energia cinética do Au seja desprezível (o núcleo permanece em repouso). Da conservação da energia,

$$E_A = E_B$$

$$K_A + \frac{q_\alpha Q_{Au}}{4\pi\varepsilon_0 r_A} = K_B + \frac{q_\alpha Q_{Au}}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$

como $r_A >> r_B$, vamos fazer $r_A \to \infty$.

Como r_B é o ponto de retorno (menor distância), $K_B = 0$.

Assim

$$K_A = \frac{q_\alpha Q_{Au}}{4\pi\varepsilon_0 r_B}$$

$$K_A = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{2\times79\times(1{,}6\times10^{-19}C)^2}{5\times10^{-14}\,m}$$

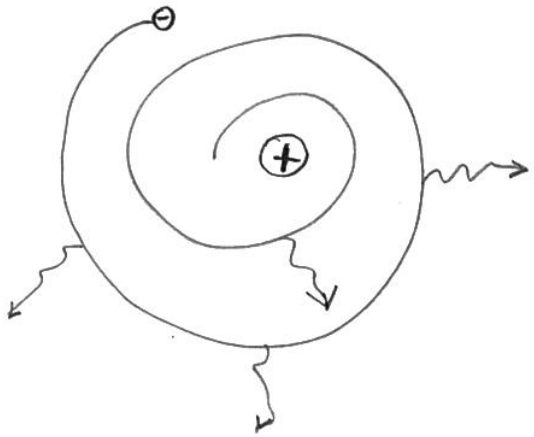
$$K_A = 7{,}3\times10^{-13}J = 4{,}6\times10^6 eV$$

ou $K_A = 4{,}6$ MeV

Na verdade, Rutherford sabia a energia das partículas α e usou isso para calcular r_B.

PROBLEMAS DO MODELO DE RUTHERFORD

A teoria eletromagnética clássica prevê que uma carga elétrica acelerada emite radiação. Se o elétron descreve órbitas circulares (ou elípticas) em torno do próton, ele está acelerado. Então o elétron deveria emitir radiação. Portanto ele iria perdendo energia (diminuindo a velocidade) até cair no núcleo. Assim o átomo não poderia ser estável.



Outra questão é que o elétron deveria perder energia de forma contínua. Assim ele emitiria um espectro contínuo (todos os comprimentos de onda) e não o espectro de linhas, que é observado na realidade.

O MODELO DE BOHR

Bohr postulou em 1913 que o elétron poderia circular em órbitas estacionárias sem emitir radiação. Estas órbitas seriam tais que o momento angular do elétron fosse quantizado, ou seja

$$L = n\frac{h}{2\pi}$$

com $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Aqui vamos supor órbitas circulares para simplificar, tal que

$$L = mvr = n\frac{h}{2\pi}$$

n é chamado número quântico e $h/2\pi$ é chamado $\hbar$.

De acordo com Bohr, se o átomo passar de um nível com $n = n_i$ para outro com $n = n_f$, ele emite um fóton com energia

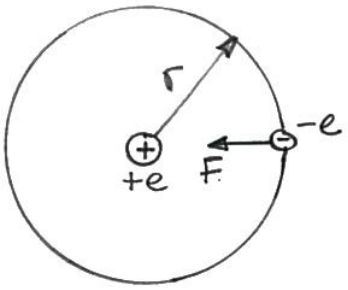
$$hf = E_i - E_f$$

Bohr obteve o princípio da quantização do momento angular a partir da suposição que o átomo deveria emitir um fóton com a frequência prevista classicamente se passasse de um nível com n grande para o nível com $n-1$.

$$hf_{class} = \lim_{n\to\infty} E_n - E_{n-1}$$

(princípio da correspondência)

RAIOS E VELOCIDADES POSSÍVEIS



Supondo que a força centrípeta é a força eletrostática, temos

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad (A)$$

Da quantização do mom. ang., temos

$$v = \frac{nh}{2\pi m r} \qquad (B)$$

(B) → (A),

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 m r^3}$$

Então os possíveis valores de r, que vamos rotular como r_n, são

$$r_n = n^2\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Substituindo esse resultado em (B), obtemos

$$v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h}\cdot\frac{1}{n}$$

O menor valor de r ocorre para $n=1$ e é chamado raio de Bohr

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5{,}29\times10^{-11}\ m$$

(faça as contas). Assim todos os raios permitidos são dados por

$$r_n = n^2 a_0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A maior velocidade ocorre para $n=1$ e é dada por

$$v_1 = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} = 2{,}19\times10^6\ m/s$$

(faça as contas). Todas as velocidades permitidas podem ser escritas como

$$v_n = \frac{v_1}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Note que:

(1) O diâmetro do átomo no estado fundamental é

$$2a_0 \simeq 10^{-10}\ m$$

(2) v_1 corresponde a menos de 1% da veloc da luz, mostrando que considerações relativísticas não são necessárias no átomo de hidrogênio.

NÍVEIS DE ENERGIA

As energias cinética e potencial no estado n são dadas por:

$$K_n = \frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

$$U_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{m e^4}{4 \epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

Assim a energia mecânica é

$$E_n = K_n + U_n = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 n^2}$$

A menor energia possível (mais negativa) é

$$E_1 = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2}$$

$$= -2{,}18 \times 10^{-18} \text{ J}$$

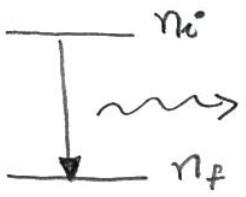
$$= -13{,}6 \text{ eV}$$

(faça as contas). Todas as energias permitidas são dadas por

$$E_n = -\frac{13{,}6 \text{ eV}}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

LINHAS ESPECTRAIS DO H

Suponha que um átomo de hidrogênio faça uma transição de um nível com n_i maior para outro nível com n_f menor.



A energia do fóton emitido é

$$hf = E_i - E_f$$

$$= -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 n_i^2} - \left(-\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2 n_f^2}\right)$$

A freq. do fóton é dada por

$$f = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

como $f\lambda = c \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c}$,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

substituindo os valores das constantes obtemos

$$\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} = 1{,}097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

que é a cte de Rydberg. Portanto

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right), \quad n_i > n_f$$

Fazendo $n_f = 1$ e $n_i = n$, temos

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

que é a série de Lyman.

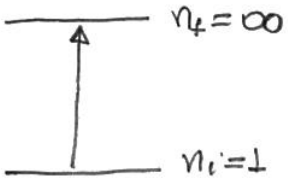
Fazendo $n_f = 2$ e $n_i = n$, temos

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \cdot \quad n = 3, 4, 5, \cdots$$

que é a série de Balmer. As outras séries podem ser obtidas fazendo $n_f = 3, 4, \cdots$.

IONIZAÇÃO DO ÁTOMO DE HIDROGÊNIO

A energia de ionização é a energia necessária para remover o elétron do átomo, ou seja, a energia necessária para o átomo fazer a transição $n_i = 1$ para $n_f = \infty$.



Para o H,

$$I = -\frac{13,6\,eV}{\infty^2} - \left(-\frac{13,6\,eV}{1^2}\right)$$

$$I = 13,6\,eV$$

O átomo (no nível fundamental) deveria absorver um fóton com energia igual a 13,6 eV para ser ionizado.

EX. (a) Calcular as energias cinética, potencial e mecânica para o H no 1º nível excitado.

Sol.

$$K_n = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = \frac{13,6\,eV}{n^2}$$

$$U_n = -\frac{me^4}{4\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{27,2\,eV}{n^2}$$

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{13,6\,eV}{n^2}$$

Para $n = 2$, temos: $K_2 = 3,4\,eV$, $U_2 = -6,8\,eV$ e $E_2 = -3,4\,eV$.

(b) Calcular λ para o fóton emitido na transição $n = 2 \rightarrow n = 1$.

Sol.

$$hf = h\frac{c}{\lambda} = E_2 - E_1$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_2 - E_1}$$

$$\lambda = \frac{4,136 \times 10^{-15}\,eV.s \times 3 \times 10^8\,m/s}{-3,4\,eV - (-13,6\,eV)}$$

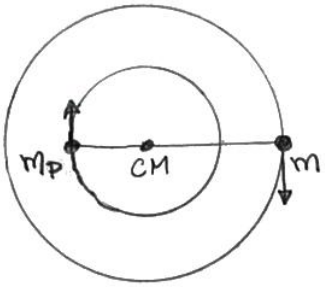
$$\lambda = 1,22 \times 10^{-7}\,m = 122\,nm$$

MASSA NUCLEAR FINITA

Nas nossas deduções, supusemos que o elétron gira em torno do próton e o próton permanece em repouso. Isso é equivalente a supor que o próton tem uma massa infinita. Numa suposição mais realista, as duas massas giram em torno do centro de massa comum.

Da mecânica clássica, pode-se obter os mesmos resultados com a massa do elétron substituída pela massa reduzida

$$m_r = \frac{m \cdot m_p}{m + m_p}$$



como $m_p = 1836{,}2\ m$,

$$m_r = \frac{m \cdot 1836{,}2\,m}{m + 1836{,}2\,m}$$

$$= 0{,}99946\,m$$

Note que a correção é muito pequena.

DEUTÉRIO

O deutério é um átomo com 1 elétron e um núcleo com um próton e um nêutron. Para o deutério,

$$m_r = \frac{2 \times 1836{,}2\,m \cdot m}{2 \times 1836{,}2\,m + m}$$

$$m_r = 0{,}99973\,m$$

Embora a diferença seja muito pequena, ela pode ser percebida por espectrômetros modernos. Isso permitiu a descoberta do deutério por Harold Urey em 1932.

O ÁTOMO DE POSITRÔNIO

No átomo de positrônio o próton é trocado por um pósitron, que tem carga $+e$ e massa igual à do elétron. Para o positrônio

$$m_r = \frac{m \cdot m}{m + m} = \frac{m}{2}$$

Como $E_n \propto m_r$, os níveis de energia do positrônio são iguais aos do H divididos por 2.

O positrônio tem uma vida média muito pequena ($\sim 10^{-6}$s) porque o pósitron e o elétron se aniquilam mutuamente.

ÁTOMOS HIDROGENÓIDES

O modelo de Bohr pode ser aplicado a íons como He^+, Li^{++}, ... (que possuem só um elétron). Nesse caso a carga do núcleo é Ze em vez de e. Trocando-se e^2 por Ze^2 nas expressões para r_n, v_n e E_n no H obtemos as expressões para os íons (átomos hidrogenóides). Assim

$$r_n = n^2 \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m Z e^2}$$

os raios são menores por um fator Z

$$v_n = \frac{Ze^2}{2\epsilon_0 h n}$$ as velocidades são maiores por um fator Z.

$$E_n = -\frac{mZ^2e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$$ as energias são mais negativas por um fator Z^2.

Como os núcleos têm massas maiores, as correções de massa nuclear finita são ainda menores.